2025-2026 | Correction devoir surveillé 6 | Calculatrice interdite

Correction devoir surveillé 6

Algèbre linéaire

Exercice 1-2

Cf DM 1

Exercice 3

Notons $L_1,\ldots, L_5$ les lignes de cette matrice et $C_1,\ldots, C_5$ les colonnes.

• Pour le rang. On remarque que $L_1 = L_3 = L_5$ et $L_2 = L_4$. Comme les lignes L_1 et L_2 sont libres, le rang de A est 2.

• Pour l'image. Les vecteurs colonnes de A engendrent $Im(f)$. De plus $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $\mathrm{rf}(f) = 2$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) \; = \; \mathrm{vect}\,(C_1, C_2) \; = \; \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

• Pour le noyau. D'après le théorème du rang, le noyau est de dimension 3. Il suffit de trouver 3 vecteurs libres du noyau. Par exemple :

$$\mathrm{Ker}(f) \; = \; \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 4

$\boxed{1}$ Soit B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$f(\lambda B + \mu C) \; = \; A(\lambda B + \mu C) \; = \; \lambda AB + \mu AC \; = \; \lambda f(B) + \mu f(C)$$

L'application f est donc linéaire.

$\boxed{2}$ Notons $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rclclcl}
f(E_{11}) & = & AE_{11} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \Longrightarrow & [f(E_{11})]_{\mathcal{B}_c} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
f(E_{12}) & = & AE_{12} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \Longrightarrow & [f(E_{12})]_{\mathcal{B}_c} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
f(E_{21}) & = & AE_{21} & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & \Longrightarrow & [f(E_{21})]_{\mathcal{B}_c} & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
f(E_{22}) & = & AE_{22} & = & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \Longrightarrow & [f(E_{22})]_{\mathcal{B}_c} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi la matrice cherchée est

$$[f]_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

$\boxed{1}$ Montrons que φ est une application linéaire. Soient P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_0), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)) \\
&= \lambda(P(a_0), \ldots, P(a_n)) + \mu(Q(a_0), \ldots, Q(a_n)) \\
&= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi φ est bien une application linéaire.

$\boxed{2}$ Montrons tout d'abord que φ est injective. Soit P dans $\ker\varphi$, on a alors :

$$\begin{aligned}
P \in \ker\varphi &\Longrightarrow \varphi(P) = 0 \\
&\Longrightarrow (P(a_0), \ldots, P(a_n)) = 0 \\
&\Longrightarrow \forall k \in \{0, \ldots, n\},\ P(a_k) = 0
\end{aligned}$$

Comme $a_0, \ldots, a_n$ sont distincts, le polynôme P a $n+1$ racines alors que son degré est inférieur ou égal à n. On a donc bien $P = 0$, ce qui montre que $\ker\varphi = \{0\}$ et que φ est injective. Pour la surjectivité, utilisons le théorème du rang sur φ :

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) + \dim(\ker\varphi).$$

On obtient donc :

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = n + 1.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) \end{cases}$$

On a donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^{n+1}$ et φ bijective.

$\boxed{3}$ On a $\varphi(L_i) = e_i$ donc :

$$(L_i(a_0), \dots, L_i(a_n)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Ainsi :

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad L_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Montrons tout d'abord que la famille est libre. Considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0.$$

En évaluant en a_i avec $i \in \{0, \dots, n\}$:

$$\lambda_0 L_0(a_i) + \cdots + \lambda_i L_i(a_i) + \cdots + \lambda_n L_n(a_i) = 0$$

Ainsi $lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc libre. De plus, elle présente $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{5}$ Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n.$$

En évaluant en a_i, avec i quelconque dans $\{0, \dots, n\}$, on obtient $P(a_i) = \lambda_i$. Les coordonnées de P dans la base β sont donc $(P(a_0), \dots, P(a_n))$. Ainsi :

$$P \quad = \quad P(a_0)L_0 \;+\; \cdots \;+\; P(a_n)L_n.$$

$\boxed{6}$ Pour $P = 1$, la dernière relation donne :

$$1 \quad = \quad L_0 \;+\; \cdots \;+\; L_n.$$

Exercice 7

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour λ, μ dans $\mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\phi(\lambda P + \mu Q) \quad = \quad (\lambda P + \mu Q)' + m(\lambda P + \mu Q) \quad = \quad \lambda(P' + mP) + \mu(Q' + mQ) \quad = \quad \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit P dans $Ker(\phi)$, on a donc :

$$P \in \operatorname{Ker}(\phi) \quad \Longrightarrow \quad P' + mP = 0 \quad \Longrightarrow \quad P' = -mP \quad \Longrightarrow \quad \deg(P') = \deg(P)$$

ce qui n'est réalisé que si P est nul. Le noyau de ϕ est donc réduit à $\{0\}$, l'application ϕ est donc injective. De plus les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, l'application devient automatiquement bijective.

$\boxed{\text{Q3}}$ D'après la question précédente P a un antécédent par ϕ de même degré ; notons-le par Q. On a donc :

$$P(x)e^{mx} \quad = \quad \phi(Q)(x)e^{mx} \quad = \quad (Q'(x) + mQ(x))e^{mx} = (Q(x)e^{mx})'$$

$\boxed{\text{Q4}}$ On cherche une primitive de $f(x) = x^5 e^x$ de la forme $g(x) = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)e^x$. L'équation $g' = f$ devient donc :

$$ax^5 + (b + 5a)x^4 + (c + 4b)x^3 + (d + 3c)x^2 + (e + 2d)x + (f + e))e^x = x^5 e^x$$

En simplifiant par e^x et en identifiant on trouve ; $g(x) = x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120$. Ainsi :

$$\int_0^1 f(x)dx \;=\; [g(x)]_0^1 \;=\; 1 - 5 + 20 - 60 + 120 \;=\; 76$$

Exercice 8

$\boxed{1}$ Soit A l'ensemble des polynômes annulateurs de u. Montrons que A est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
- $A \subset \mathbb{R}[X]$ par définition.
- $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$.
- Montrons que A est stable par combinaison linéaire. Soient $P, Q \in A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Ainsi $\lambda P + \mu Q \in A$ et donc A est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{2}$ De même, montrons que (P) est un sev de $\mathbb{R}[X]$:
- $(P) \subset \mathbb{R}[X]$ par définition.
- $(P) \neq \emptyset$ car $0 = 0 \cdot P \in (P)$.
- Montrons que (P) est stable par combinaison linéaire. Soient $PQ_1, PQ_2 \in (P)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda PQ_1 + \mu PQ_2 = P(\lambda Q_1 + \mu Q_2) \in (P).$$

Ainsi (P) est un sev.

$\boxed{3}$ L'ensemble B est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. D'après le théorème du plus petit élément, B admet un minimum.

$\boxed{4}$ D'après la question précédente, il existe P dans $A \setminus \{0\}$ tel que $\deg(P) = n_0$. Notons α son coefficient dominant et posons $P_0 = \frac{1}{\alpha}P$. On a :
- Le coefficient dominant de P_0 est 1.
- $P_0(u) = \frac{1}{\alpha}P(u) = \frac{1}{\alpha}0 = 0$, donc $P_0 \in A$.
- $\deg(P_0) = \deg(P) = n_0$.

D'où le résultat.

$\boxed{5}$ Soit $P_0Q \in (P_0)$ alors :

$$(P_0Q)(u) = P_0(u) \circ Q(u) = 0 \circ Q(u) = 0,$$

donc $P_0Q \in A$. Ainsi $(P_0) \subset A$.

$\boxed{6}$ Soit $P \in A$. Effectuons la division euclidienne de P par P_0. Il existe Q, R tels que

$$P = QP_0 + R, \qquad \deg(R) < n_0.$$

D'après cette relation, on obtient

$$R(u) = P(u) - Q(u)P_0(u) = 0 - 0 = 0.$$

Si $R \neq 0$, alors $\deg(R) \in B$ et $\deg(R) < \min B = n_0$, contradiction. Donc $R = 0$ et $P = QP_0 \in (P_0)$.
Ainsi $A \subset (P_0)$.

Conclusion : $A = (P_0)$.

$\boxed{7}$ Supposons qu'il existe P_0 et P_1 polynômes minimaux. D'après les questions précédentes, on a

$$(P_0) = A = (P_1).$$

Ainsi il existe Q_1, Q_2 tels que

$$\begin{cases} P_0 = P_1 Q_1, \\ P_1 = P_0 Q_2. \end{cases}$$

Donc $P_0 = Q_1 Q_2 P_0$. Comme $P_0 \neq 0$, on a $Q_1 Q_2 = 1$. En appliquant le degré, on obtient :

$$\deg(Q_1) + \deg(Q_2) = \deg(1) = 0$$

Ainsi Q_1 et Q_2 sont des constantes. Enfin, P_0 et P_1 sont unitaires, donc $P_0 = P_1$.
On a bien l'unicité du polynôme minimal.

Exercice 5

1. Il est facile de voir que le vecteur (0,0,0) appartient à F et à G. Donc F et G sont non vides. Soient $(x,x,x),(y,y,y) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$(x,x,x) + \alpha(y,y,y) = (x+\alpha y, x+\alpha y, x+\alpha y) \in F$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $(0,y,z),(0,y',z') \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(0,y,z) + \alpha(0,y',z') = (0, y+\alpha y', z+\alpha z') \in G$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On voit que :

$$F = \big\{x(1,1,1) \;/\; x \in \mathbb{R}\big\} \;=\; \mathrm{vect}\{(1,1,1)\}$$

$$G = \big\{y(0,1,0) + z(0,0,1) \;/\; x,y \in \mathbb{R}\big\} \;=\; \mathrm{vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

De plus, on vérifie facilement que les familles $\{(1,1,1)\}$ et $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ sont libres. Elles forment donc des bases respectives de F et G. On en déduit que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Enfin, si $(x,y,z) \in F \cap G$, alors $x = y = z$ et $x = 0$. Donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$, et F et G sont en somme directe.

2. On vérifie facilement que $(0,0,0,0) \in H$, de sorte que $F \neq \emptyset$. Soient (x,y,z,t), $(x',y',z',t') \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $(x,y,z,t) + \alpha(x',y',z',t') = (x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z', t+\alpha t')$ satisfait :

$$\begin{array}{rcccl} x+\alpha x' & = & 2y - z + \alpha(2y' - z') & = & 2(y+\alpha') - (z+\alpha z') \\ t + \alpha t' & = & x+y+z+\alpha(x'+y'+z') & = & (x+\alpha x') + (y+\alpha y') + (z+\alpha z') \end{array}$$

ce qui montre que $(x,y,z,t) + \alpha(x',y',z',t') \in H$. Donc H est un sous-espace vectoriel de R^4. De plus,

$$\begin{array}{rcl} H & = & \big\{(2y-z, y, z, x+y+z) \;/\; x,y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \big\{x(0,0,0,1) + y(2,1,0,1) + z(-1,0,1,1) \;/\; x,y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ & = & \mathrm{vect}\big\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\big\} \end{array}$$

Montrons que la famille est libre. Considérons l'équation vectorielle

$$\alpha(0,0,0,1) + \beta(2,1,0,1) + \gamma(-1,0,1,1) \;=\; (0,0,0,0)$$

équation équivaut au système

$$\begin{cases} 0 & = & 2\beta - \gamma \\ 0 & = & 2\beta \\ 0 & = & \gamma \\ 0 & = & \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\}$ est donc libre, et c'est une base de H.