

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**SUJET TYPE CCINP****LE 27/02/2024 - FILIÈRE PSI****POLYNÔMES DE LEGENDRE****Durée : 4 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

Le sujet est constitué d'un seul problème en six parties.

**Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.**

# PROBLÈME

On rappelle que  $\mathbb{R}[X]$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour  $n$  entier naturel,  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $P^{(n)}$  sa dérivée  $n$ -ième.

On considère l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = (X^2 - 1) P'' + 2XP'.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = (X^2 - 1)^n$  et  $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$ . Les polynômes  $L_n$  sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour  $n$  entier naturel,  $a_n$  désigne le coefficient dominant de  $L_n$ .

## Partie I - Quelques résultats généraux

**Q1.** Déterminer  $L_0$ ,  $L_1$  et vérifier que  $L_2 = \frac{1}{2} (3X^2 - 1)$ .

Dans la suite de cette partie,  $n$  désigne un entier naturel.

**Q2.** Justifier que  $L_n$  est de degré  $n$  et préciser la valeur de  $a_n$ .

**Q3.** Montrer que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q4.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer les racines de  $U_n$ , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel  $\alpha \in ]-1, 1[$  et un réel  $\lambda$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda (X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

**Q5.** Dans cette question seulement,  $n \geq 2$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On suppose qu'il existe des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  deux à deux distincts dans  $]-1, 1[$  et un réel  $\mu$  tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu (X - 1)^{n-k} (X + 1)^{n-k} (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels  $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$  deux à deux distincts dans  $]-1, 1[$  et un réel  $\nu$  tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu (X - 1)^{n-k-1} (X + 1)^{n-k-1} (X - \beta_1) \dots (X - \beta_{k+1}).$$

**Q6.** En déduire que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L_n$  admet  $n$  racines réelles simples, toutes dans  $[-1, 1]$ .  
On les note  $x_1, \dots, x_n$ , en convenant que  $x_1 < \dots < x_n$ .

On note  $A_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ .

En convenant que  $A_0 = 1$ , on a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n$ .

## Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme $\phi$

**Q7.** Prouver que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

Dans les questions **Q8** à **Q13**,  $n$  désigne un entier naturel.

**Q8.** Justifier que  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $\phi$ .

On note  $\phi_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  induit par  $\phi$ . Cet endomorphisme  $\phi_n$  est donc défini par :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_n(P) = \phi(P)$ .

**Q9.** On note  $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\phi_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que  $M$  est triangulaire supérieure et que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_{k,k} = k(k+1)$ .

**Q10.** Montrer que  $\phi_n$  est diagonalisable. *On pourra utiliser la question **Q9**.*

**Q11.** Vérifier que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1) U'_k - 2kXU_k = 0$ .

**Q12.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . En dérivant  $(k+1)$  fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que :  $(X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$ .

**Q13.** Montrer que, pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  le polynôme  $L_k$  est un vecteur propre de  $\phi_n$ , en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question **Q12**.*

**Q14.** Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à  $\phi$ .

Dans la suite du problème, pour  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

## Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

**Q15.** Justifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

On note  $\|\cdot\|$  la norme associée, qui est donc définie par :  $\|f\| = \left( \int_{-1}^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Q16.** Établir que :  $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt$ .  
En déduire que  $\phi$  est un endomorphisme autoadjoint.

**Q17.** Montrer que la famille  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  est orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . *On pourra utiliser la question **Q13**.*

**Q18.** Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle P, L_n \rangle = 0$ .

**Q19.** On admet que  $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} L_n$ . Que peut-on dire de la famille  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ?

Dans la suite de cette partie,  $P$  désigne un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$  la distance de  $P$  au sous-espace  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q20.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Justifier qu'il existe un unique polynôme  $T_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ , puis justifier l'égalité :  $d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(P))^2$ , où  $c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle$ .

**Q21.** Prouver que la série  $\sum (c_k(P))^2$  converge et que :  $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$ .

## Partie IV - Fonction génératrice

On admet, dans la suite du problème que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) L_{n+1} - (2n+1) X L_n + n L_{n-1} = 0$  et on considère la série entière de la variable  $t$  :  $\sum L_n(x) t^n$ . On note  $r$  la racine positive du polynôme  $X^2 - 2X - 1$ .

**Q22.** Montrer que :  $\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |L_n(x)| \leq r^n$ . *On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.*

**Q23.** Pour  $x \in [-1, 1]$ , on note  $R(x)$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum L_n(x) t^n$ . Montrer que :  $R(x) \geq \frac{1}{r}$ .

**Q24.** Pour  $x \in [-1, 1]$  et  $t \in \left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right]$ , on note  $S_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n$ . Montrer que  $S_x$  est solution sur  $\left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right]$  de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2) y' + (t - x) y = 0.$$

**Q25.** En déduire que :  $\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \left[-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right], \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$ .

**Q26.** Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question **Q25**, de retrouver l'expression des polynômes  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .

## Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

Pour  $\theta \in [0, \pi]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $w_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n du$ .

**Q27.** Soit  $t \in ]-1, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la fonction  $v_n$  de  $[-\pi, \pi]$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $v_n(u) = t^n (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n$ . Montrer que  $\sum v_n$  converge normalement sur  $[-\pi, \pi]$ .

**Q28.** Justifier l'égalité :  $\forall t \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u}$ .

Dans les questions **Q29** et **Q30**,  $a$  désigne un réel strictement positif.

**Q29.** Montrer que  $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$ . *On pourra utiliser le changement de variable défini par  $v = \pi - u$ .*

**Q30.** Montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + a^2 \cos^2 u} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$ . *On pourra utiliser le changement de variable défini par  $u = \arctan v$ .*

**Q31.** En déduire que :

$$\forall t \in ]-1, 1[ , \forall \theta \in [0, \pi] , \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - it \sin \theta \cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}} .$$

**Q32.** Déduire de ce qui précède que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \theta \in [0, \pi]$ ,  $L_n(\cos \theta) = w_n(\theta)$ .

**Q33.** Justifier que :  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\forall t \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$ .

**Q34.** Prouver que :  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $R(x) = 1$ . *On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R(x)$ ,  $(z^2 - 2xz + 1) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n \right)^2 = 1$ .*

## Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions **Q35** à **Q43**,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

**Q35.** Soit  $h$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{2n-1}$  sur  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe  $2n$  réels  $t_1 < \dots < t_{2n}$  vérifiant :  $\forall i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ ,  $h(t_i) = 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $c$  tel que :  $h^{(2n-1)}(c) = 0$ .

**Q36.** Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\ell_i$  l'application linéaire définie sur  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , par :  $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $\ell_i(P) = P(x_i)$  (on rappelle que  $x_1, \dots, x_n$  désignent les racines de  $L_n$  et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  est libre dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ .

**Q37.** En déduire que pour toute application linéaire  $\psi$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe un unique  $n$ -uplet  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  de réels tels que :  $\psi = \sum_{k=1}^n \beta_k \ell_k$ .

**Q38.** Montrer qu'il existe un unique  $n$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de réels tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 P(t) dt = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n).$$

**Q39.** Montrer que la relation de la question **Q38** reste vérifiée pour tout  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ . *On pourra, pour  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ , utiliser la division euclidienne de  $P$  par  $L_n$  et la question **Q18**.*

Dans la suite du problème,  $f$  désigne une application de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{2n}$  sur  $[-1, 1]$ .

**Q40.** Montrer que :  $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H'_n(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$ . *On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  qui à  $P$  associe :  $(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$ .*

On rappelle que  $A_n$  a été défini à la question **Q6**.

**Q41.** Soit  $x \in [-1, 1]$  tel que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \neq x_i$ .

Montrer que :  $\exists c \in [-1, 1], f(x) - H_n(x) = \frac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$ . *On pourra considérer l'application  $g$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $g(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} K$ , où  $K$  est un réel dépendant de  $x$  à préciser, et appliquer le résultat de la question **Q35** à la fonction  $g'$ .*

**Q42.** Montrer que :  $\forall y \in [-1, 1], \exists c \in [-1, 1], f(y) - H_n(y) = \frac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$ .

**Q43.** Justifier l'existence de  $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n)}(t)|$ , puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^1 f(t) dt - (\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt.$$

**Q44.** Déterminer un équivalent simple au voisinage de  $+\infty$  de  $\int_{-1}^1 A_n(t)^2 dt$ .

FIN