2023-2024

Devoir surveillé 7

PSI

Endomorphismes d'un eve - Suites et séries de fonctions - 4h

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

   5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice 2

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

et on pose $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$ *et* $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AB = BA\}$. *Dans cet exercice, la transposée d'une matrice* $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *est notée* $M^\top$.

Partie 1 – Réduction de la matrice A

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A puis une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que P est orthogonale et $P^\top AP$ est diagonale.

Dans la suite, on pose $D = P^\top AP$.

Partie 2 – Étude de $\mathscr{C}(A)$

3. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que $F \subset \mathscr{C}(A)$.

5. Pour une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, établir l'équivalence :

$$B \in \mathscr{C}(A) \Longleftrightarrow P^\top BPD = DP^\top BP$$

6. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

7. Démontrer que $\mathscr{C}(A) = F$.

8. La matrice A^3 appartient-elle à F (on justifiera la réponse) ?

Partie 3 – Étude du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Ker}(A)$

9. On note p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Ker}(A)$ (Pour le produit scalaire classique de $\mathbb{R}^3$) et B la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $B \in \mathscr{C}(A)$.

Exercice 4

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q27. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A.

Q30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geqslant 0$.

Q31. Étudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Q32. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Q33. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.