Devoir surveillé 7 - Version difficile

Suites et séries de fonctions - endomorphismes d'un eve - 4h

Exercice

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie par

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Notations

— On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

— Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt}\, \mathrm{d}t \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbf{R}$.

II Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{t^2+1} \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On pose

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi_h \,:\, \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

5. Montrer que
$$S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)\ \mathrm{d}t.$$

6. Montrer que, pour tous $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$, on a
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7. En déduire que
$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ quand } h \to 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.

— $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.

— E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^tA$, la transposée de A.

— $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.

— $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{\mathrm{S}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A^tA = {}^tAA$.*

Définition 2 *$A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)*

Objectifs

— Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.

($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2,2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.*

I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_4})$.

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$.

6. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$.

IV. La condition $(\mathrm{C_3})$ implique la condition $(\mathrm{C_4})$

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2.
   En déduire que A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

8. Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie $(\mathbf{C_3})$.

9. En déduire que A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $(\mathbf{C_3})$, avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie $(\mathbf{C_3})$.

12. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

V. La condition $(\mathrm{C_4})$ implique la condition $(\mathrm{C_1})$

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$.
Lorsque $\sin\theta \neq 0$, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$.

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \qquad \mathrm{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\,\mathrm{Exp}(A)Q$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

20. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$.
En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

    — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$

    — soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

— les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire

— il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \ \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?