2022-2023 **Devoir surveillé 5** PSI

Devoir surveillé 5

Séries numériques - espaces vectoriels euclidiens - 4h

> La preuve que la Terre est ronde,
> c'est que les gens qui ont les pieds plats
> ont du mal à marcher
>
> Charles Bernard

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a)\quad \frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}} \qquad b)\quad \sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right) \qquad c)\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \qquad d)\quad \frac{1}{2^{\ln(n)}}$$

Exercice 2

Soit E l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$ bornées. On note également pour (u_n) et (v_n) dans E :

$$(u/v) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u_k.v_k}{2^k}$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Donner une famille libre infinie de E. En déduire que E n'est pas de dimension finie.
3. Montrer que la série définissant (u/v) est convergente pour toutes suites u et v.
4. En déduire que $(\_/\_)$ est un produit scalaire sur E.
5. On note U la suite valant $U_0=1$ et nulle ensuite et V la suite constante égale à 1. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n=0 \quad \text{et} \quad U_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ V_n=1\end{array}\right.$$

   Quelles sont les normes de U et V ? On donnera la valeur de ces normes sans symbole $\sum$.
6. Notons $F=Vect(U,V)$. Déterminer un vecteur W de E tel que (U,W) soit une base orthonormée de F.
7. Pourquoi est-ce que p_F la projection orthogonale sur F existe-t-elle ? Pourquoi est-ce que $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$ existe-t-elle ?
8. Montrer que pour toute suite (A_n), on a :

$$p(x) \;=\; \langle A,U\rangle U \;+\; \langle A,W\rangle W$$

9. Notons W la suite de E définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ W_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   Déterminer la projection orthogonale de W sur F.

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\sum_{k\geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

On admet que pour tout x de $]-1,1[$, on a :

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) **Montrer que pour tout x de $]-1;1[$ la série** $\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ **converge. Déterminer sa limite.**

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. (a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

   On admettra par la suite que : $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge **pour x dans** $[0, \frac{\pi}{2}[$ **vers un réel que l'on notera $f(x)$ et que l'on déterminera.**

   (b) **On supposera que :**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

   Montrer que f est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$.

4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.

   (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I.

5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).
On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = \circ(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

(c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

(d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.