2023-2024

Devoir surveillé 5 - Version difficile

PSI

Séries - préhilbertiens réels 4h

Problème I

Note importante. Ce sujet est composé de 2 problèmes indépendants. Il n'est pas nécessaire de les traiter dans l'ordre. Si une question n'est pas résolue, il est possible d'en admettre le résultat, que l'on veillera à correctement citer lorsqu'on l'utilisera. La clarté de la rédaction et la précision des raisonnements font partie intégrante de l'évaluation d'une copie. On veillera notamment à encadrer soigneusement *tous* les résultats demandés.

— Les calculatrices sont interdites —

I SYMÉTRIES ANTICOMMUTANT

Dans tout ce problème, E est un **R**-espace vectoriel de dimension finie n. L'application identité de E est notée id. Si f est un endomorphisme de E, pour toute valeur propre λ de f on note $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de f relatif à λ.

Q1. Dans cette question seulement, E est un **R**-espace vectoriel de dimension $n = 4$. On le munit d'une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et on considère les endomorphismes u et v représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a) Montrer que u et v sont des symétries, et vérifier rapidement que $u \circ v = -v \circ u$.

1.b) Calculer $\mathrm{tr}\, u$ et $\mathrm{tr}\, v$; montrer que cela permet de déterminer la dimension des sous-espaces propres de u et de v (sans avoir à déterminer ces derniers explicitement).

1.c) Déterminer une base (e_1, e_2) de $\mathrm{E}_1(u)$. Montrer que la famille (e_3, e_4) définie par $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$ est une base de $\mathrm{E}_{-1}(u)$.

Si l'on pose $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, justifier que $\mathcal{E}$ est une base de E et déterminer la matrice représentative de u et de v dans la base $\mathcal{E}$.

On revient au cas général ; n est maintenant supposé quelconque. Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant

$$u^2 = v^2 = \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad u \circ v + v \circ u = 0.$$

Q2. Montrer que $\mathrm{tr}(u \circ v) = 0$.

Q3. Montrer que $\mathrm{tr}\, u = \mathrm{tr}\, v = 0$.

Q4. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \oplus \mathrm{E}_{-1}(u)$ et expliciter, pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, la décomposition de x dans cette somme directe.

Q5. Montrer que la dimension de E est paire. On notera $n = 2k$, avec k un entier naturel.

Q6. Montrer que $v\big(\mathrm{E}_1(u)\big) = \mathrm{E}_{-1}(u)$ et que $v\big(\mathrm{E}_{-1}(u)\big) = \mathrm{E}_1(u)$.

Q7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{2k})$ de E dans laquelle les matrices de u et de v s'écrivent, par blocs :

$$\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right)$$

II ÉTUDE DES SÉRIES OSCILLANTES

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de période d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \omega_{n+d} = \omega_n.$$

Dans ce problème, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Q8. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

Q9. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

9.a) Pour tout entier naturel m, exprimer $\displaystyle\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

9.b) Déterminer un réel α tel que

$$\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

9.c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(\mathrm{S}_{(m+1)d} - \mathrm{S}_{md}\right)$ converge.

9.d) Montrer très *soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

Q10. Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

Q11. Une généralisation Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k.$$

Par souci de commodité, on note également $\mathrm{T}_0 = 0$.

11.a) Montrer que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

11.b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) + \frac{\mathrm{T}_n}{a_{n+1}}.$$

11.c) Montrer que la série $\sum \mathrm{T}_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$ converge.

11.d) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

Problème II

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{q_n}{n}\right).$$

A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n},+\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n},+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(y)\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in\,]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ signifie que $(f_n(\mathrm{x}))_n$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1,+\infty[$ que l'on convient de noter également q.

Q 13. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux}\,\mathrm{d}u$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1,+\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{-*}, \quad f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

On admettra que dans les conditions actuelles, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 16. Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

C.1) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

Q 18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Q 20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

C.3)

Q 21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

Q 22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$