Nov. 2023

Devoir surveillé 4

Calculatrice interdite

Intégrales généralisées - espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soit α dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$D_\alpha \quad = \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

On pourra remarquer (aucune preuve demandée) et utiliser qu'on a, dans chaque question, un résultat similaire en remplaçant *sin* par *cos*.

1. Soit β dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'intégrale D_α est de même nature que :

$$S_{\alpha,\beta} \quad = \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha} dt$$

2. Si $\alpha > 1$, montrer que D_α est convergente.

3. Si $\alpha \in]0,1]$, montrer que :
   a) D_α est convergente.
   b) D_α n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \geq \sin^2(x)$.

4. Si $\alpha \leq 0$, montrer que D_α est divergente. On pourra montrer que la suite (a_n) ne tend pas vers 0 avec :

$$a_n \quad = \quad \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice 2

Pour tous réels a et b distincts, on pose :

$$I = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} dx$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que I ne dépend pas de a et b. On pourra poser : $X = 2\frac{(x-a)}{b-a} - 1$
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire sur E.

Partie I. Le théorème

1. Montrer que si φ est continue alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.
2. Supposons à présent que φ n'est pas continue en un certain a de E. Montrer qu'il existe ε dans $\mathbb{R}_+^*$ et une suite (x_n) de E qui converge vers a et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\varphi(x_n - a)| \geq \varepsilon$$

3. Soit b quelconque dans E. Posons :

$$z_n \quad = \quad b \ - \ \varphi(b)\frac{x_n - a}{\varphi(x_n - a)}$$

   Montrer que la suite (z_n) est une suite de $Ker(\varphi)$ qui converge vers b.
4. En déduire si φ n'est pas continue alors $Ker(\varphi)$ est dense dans E.

Partie II. Un exemple

5. Prenons E l'ensemble des fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ bornées et intégrables sur $\mathbb{R}^+$. On munit E de la norme :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \;=\; \underset{x\in\mathbb{R}^+}{\text{Sup}}\, |f(t)|$$
Montrer que $\|\_\|_\infty$ est une norme sur E.
6. Posons pour tout n de $\mathbb{R}$ et pour tout f de E :
$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } t \in [0;n] \\ 0 & \text{si } t \in [n;+\infty[\end{cases} \qquad\qquad \delta(f) \;=\; \int_0^{+\infty} f(t)dt$$
Montrer que (f_n) converge vers 0. En déduire que l'application δ n'est pas continue.
7. Montrer que l'ensemble :
$$D \;=\; \left\{ f \in E \,/\, \int_0^{+\infty} f(t)dt \;=\; 0 \right\}$$
est dense dans E.

Exercice 4

Soit A un sous-ensemble infini et borné de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :
$$N(P) \;=\; \underset{x\in A}{\text{Sup}}\, |P(x)|$$
De plus, on note δ_{x_0} la fonction évaluation :
$$\begin{array}{cccc} \delta_{x_0} & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P(x_0) \end{array}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Rappeler sans démonstration la caractérisation des éléments de $\overline{A}$ (l'adhérence de A) à l'aide des suites.
3. Supposons dans cette question que x_0 est dans $\overline{A}$. Montrer à l'aire de la question précédente que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \; |\delta_{x_0}(P)| \;\leq\; N(P)$$
4. En déduire que δ_{x_0} est lipschitzienne et donc continue sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Supposons à présent que x_0 n'est pas dans $\overline{A}$. Justifier l'existence de r et R dans $\mathbb{R}$ tel que :
$$A \;\subset\; [x_0 - R; x_0 - r] \,\cup\, [x_0 + r; x_0 + R]$$
6. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, notons P_n le polynôme :
$$P_n \;=\; \left(1 - \frac{(X - x_0)^2}{R^2}\right)^n$$
Étudier les variations de P_1 sur $[x_0 - R; x_0 - r] \cup [x_0 + r; x_0 + R]$. En déduire que la suite (P_n) tend vers 0 pour la norme N.
7. Montrer que δ_{x_0} est continue sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.