

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t \ln(t)}{t-1} dt$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} (x - \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(x)}{x^2} dx$$

Exercice 2

Soit A dans $M_n(\mathbb{K})$. Notons B la matrice définie par bloc :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

1. Déterminer une relation entre χ_A et χ_B . En déduire que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.
2. Notons P_0 le polynôme :

$$P_0 = \prod_{\alpha \in \text{Sp}(A)} (X - \alpha)$$

Montrer que P_0 divise tout polynôme annulateur de A et B .

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array} \right)$$

4. En déduire que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0 & P'(A) \end{array} \right)$$

5. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que Q divise XQ' . Montrer que Q est de la forme $Q = \alpha X^n$.
6. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres de la matrice A .
- La matrice A est-elle diagonalisable ? On demande une réponse sans calcul.
- Déterminer les sous-espaces propres de A .
- Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$

On pourra utiliser la question précédente.

- En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

2. Étude de $\mathcal{N}$.

- Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
- Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
- Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

3. Étude de $\mathcal{U}$.

- L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
- Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
- Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

- Calculer $U^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, où B est la matrice définie à la question 1.
- Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
- Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

- En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{n \text{ fois}}$
- Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
- Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
- (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).