Devoir surveillé 3 - Version difficile

Réduction des endomorphismes / Intégrales généralisée - 4h

Le but du problème est d'étudier la réduction de matrices définies à partir d'un résultat sur les dénombrements de certaines familles entières, en utilisant les propriétés des polynômes réciproques.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Équations algébriques réciproques

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.

1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule $u_n(P)(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ est bien définie, et que c'est une symétrie.

Un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ est dit *réciproque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciproque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathscr{P}$ (respectivement à $\mathscr{D}$).

3) Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathscr{D}$ admet 1 pour racine, et que tout polynôme de $\mathscr{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

4) Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.

5) Vérifier que $P \in \mathscr{P}$ implique $(X-1)P \in \mathscr{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathscr{D}$, il existe un unique $P \in \mathscr{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

6) Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathscr{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

Quel est le degré de P ?

Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8) Montrer que R est réciproque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence $R(x) = 0 \iff P(x + \frac{1}{x}) = 0$. Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

B. Un problème de dénombrement

Si i et j sont des entiers strictement positifs, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles $u = (u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i \leqslant j$).

La notation $f|_E$ désigne la restriction d'une application f à une partie E de son ensemble de départ.

9) Vérifier que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis et montrer que l'application

$$\begin{aligned} S_{i+1,j} &\longrightarrow S'_{i,j} \\ u &\longmapsto u|_{\{0,1,\dots,i\}} \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Dans toute la suite du problème, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$.

10) Montrer que $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ et en déduire que $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

Si $p, q \in \mathbb{N}$, on note $\binom{p}{q}$ le nombre de parties à q éléments d'un ensemble à p éléments.

11) Prouver que $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$ et en déduire la valeur de $s_{i,j}$.

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, d'élément neutre I_n pour la multiplication. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant et Φ_M son polynôme caractéristique.

Dans cette partie, on démontre que pour tous A, B dans $M_n(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

12) Établir le résultat lorsque A est inversible.

13) Conclure en considérant la suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

D. Etude spectrale de certaines matrices

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère désormais les matrices $S = (s_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n+1\}}$ et $S' = (s'_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$, où $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ ont été définis dans la partie B.

14) Montrer que S est diagonalisable. La diagonaliser pour $n = 0$ et 1, et calculer Φ_S pour $n = 0, 1$ et 2.

15) Montrer que l'application $\psi : (\mathbb{R}_n[X])^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\psi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On suppose désormais $\mathbb{R}_n[X]$ muni de celui-ci.

16) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \dots, B_n)$ définie par $B_i = \frac{X^i}{i!}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et évaluer $\psi(B_i, B_j)$ pour $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. En déduire que S est définie positive. Que peut-on en conclure sur les rangs de S et de S' ?

Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par la formule $f_i(t) = t^i e^{-t}$. La notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

17) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixé, vérifier que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, $f_i^{(j)}(t) = o(t^{-k})$ quand $t \to +\infty$. Montrer que la formule suivante :

$$L_i(t) = (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

définit un polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$ dont on déterminera les coefficients.

18) Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. (On pourra au préalable calculer $\psi(L_i, B_j)$ pour $j \leqslant i$.)

On considère l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\tau(P)(X) = P(X-1)$. On note T sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $U = T^{-1}$ son inverse.

19) Expliciter T et U et les comparer à la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{L}$. En déduire S en fonction de U, puis les valeurs de $\det(S)$ et $\det(S')$.

On considère la matrice $D = (d_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{si } i = j\,; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

20) Calculer $(DU)^2$ et en déduire que S^{-1} est semblable à $U\,U^t$, où U^t désigne la transposée de U.

21) En conclure que Φ_S est un polynôme réciproque et préciser de quelle espèce.

FIN DU PROBLÈME

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis