PSI/PC

# Devoir surveillé n$^o$2

Calculatrices interdites

**Le 27/09/2023**

---

Attention : vous devez rendre 2 copies.
Une copie contenant les parties I et II et
une copie contenant les parties III, IV et V.

Soit $a_0$, $a_1$, $\ldots$, $a_n$ des réels tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

**Partie I : les polynômes de Lagrange.**

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Donner un polynôme $L_i$ vérifiant :

$$(C) \quad \begin{cases} L_i(a_i) = 1 & \\ L_i(a_j) = 0 & \text{pour tout } j \text{ de } \{0, \ldots, n\} \text{ différent de } i \\ deg(L_i) = n & \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout $i \in [|0, n|]$, il existe un unique polynôme vérifiant les conditions $(C)$ précédentes.
3. Montrer que la famille $\beta = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
4. Soient $\mu_0$, $\ldots$,$\mu_n$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ vérifiant :

$$(C') \quad \begin{cases} P(a_i) = \mu_i & \text{pour tout } i \text{ de } \{0, \ldots, n\} \\ deg(L_i) \leq n & \end{cases} .$$

**Partie II : les polynômes de Tchebychev.**

On définit par récurrence la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, \ T_1 = X \ ; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $T_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{n-1}$.
6. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2\cos(t)\cos(nt) = \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)$.
7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(cos(t)) = cos(nt)$
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer toutes les racines de $T_n$. En déduire que $T_n$ est scindé à racines simples.

Attention : vous devez changer de copie !

**Partie III : Approximation d'une fonction par un polynôme de Lagrange.**

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On approche cette fonction $f$ par l'unique polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(a_i) = P(a_i)$ pour tout $i$ de $\{0, \ldots, n\}$ (l'existence et l'unicité de ce polynôme a été établie dans la question 4). Le but de cette partie est de déterminer une majoration de l'erreur commise dans cette approximation.

On rappelle également le théorème de Rolle : "Soit $g$ une fonction dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, alors il existe $c$ dans $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

9. Montrer qu'on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k$.
10. Justifier qu'il existe un réel $M_n$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_n$.
11. Pour tout $x$ dans $I$ distinct des $a_i$, on considère la fonction $g_x(t)$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$g_x(t) = f(t) - P(t) \ - \ (f(x) - P(x)) \prod_{k=0}^{n} \frac{t - a_k}{x - a_k}$$
Déterminer $g_x(a_i)$ et $g_x(x)$ pour tout $i$ de $\{0, \ldots, n\}$
12. En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c$ dans $I$ tel que $g_x^{(n+1)}(c) = 0$
13. En déduire qu'on a $f(x) - P(x) = \dfrac{(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.
14. montrer que :
$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \ \leq \ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_n$$

L'expression $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$ est appelée l'erreur d'approximation, on l'espère petite. L'est-elle ?

**Partie IV : Deux exemples.**

Dans ce paragraphe on considère le cas particulier $I = [-1, 1]$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, les résultats de la partie précédente s'appliquent donc pour tout entier $n$. On prend le cas particulier où les points de l'interpolation forment une subdivision régulière de $[-1, 1]$, c'est-à-dire $a_0 = -1$, $a_1 = -1 + 2 \times \frac{1}{n}$, $a_2 = -1 + 2 \times \frac{2}{n}$, ..., $a_n = -1 + 2 \times \frac{n}{n} = 1$. Attention, les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dépendent tous de $n$ même si cela n'apparaît pas dans leur notation. De même, on continue à noter $P$ le polynôme défini dans la partie précédente, et $c$ le réel défini dans la question 12, qui eux aussi dépendent de $n$ même si cela n'apparaît pas dans leurs notations.

15. On prend l'exemple $f = \sin$. Justifier qu'on a $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
16. On note ici $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre $n$ de $f$. À l'aide de la formule de Taylor-Young (ou autrement), donner la valeur de $f^{(n)}(0)$.
    (b) En déduire qu'on a $M_{2k} \geq (2k)!$.
    (c) Montrer que le majorant $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} M_n$ ne tend pas vers 0.

On peut même montrer, mais c'est plus difficile, que $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - P(x)|$ ne tend pas vers 0.

**Partie V : Polynôme de meilleure approximation.**

On continue à considérer dans ce paragraphe qu'on a $I = [-1, 1]$ et on note

$$x_k = cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

pour $k$ dans $\{0, \ldots, n+1\}$. Le but de ce paragraphe est de choisir au mieux les points $a_0, \ldots, a_n$ pour minimiser l'erreur. On va montrer que l'erreur est minimale si l'on choisit pour $a_0, \ldots, a_n$ les racines de $T_{n+1}$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebytchev.

17. Soient $b_0,\ldots,b_n$ les racines du polynôme $T_{n+1}$ et notons $U(X) = (x - b_0)(x - b_1)\ldots(x - b_n)$. Déterminer une relation entre $U$ et $T_{n+1}$
18. En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|U(x)| \leq \dfrac{1}{2^n}$
19. Déterminer $U(x_k)$ pour tout $k$ de $\{0, \ldots, n+1\}$. En déduire que $\underset{x\in[-1,1]}{Sup} |U(x)| = \dfrac{1}{2^n}$.
20. Montrer qu'en plaçant les points $a_0, \ldots, a_n$ sur les racines du polynôme de Tchebytchev, on obtient $|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{M_n}{2^n(n+1)!}$.

*On peut alors montrer que cette quantité tend toujours vers* $0$*, même pour de méchantes fonctions.*