Sept. 2023

Devoir surveillé 1

Calculatrice interdite

Algèbre linéaire

Consignes :

- La qualité de la rédaction, de la présentation sont évaluées. En particulier, encadrez ou soulignez vos résultats.
- Les calculatrices sont **interdites**, ainsi que tout autre matériel électronique.

Exercice 1

Partie I : préliminaires

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

Dans toute la suite on considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \phantom{2u_n - {}} v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

3. En déduire en particulier u_3, v_3, w_3.

Partie II : trigonalisation de A

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$, que l'on identifie à des matrices à trois lignes et une colonne :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme

$$f; \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note P la matrice de l'identité de la base $\mathcal{B}$ (au départ) dans la base canonique (à l'arrivée), c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les décompositions des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Calculer P^{-1}.

7. Finalement, donner une relation entre A, P, T et P^{-1}.

Partie III : Calcul des puissances

On note $T = N + D$ où D est une matrice diagonale et où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (la matrice T est définie dans la partie précédente).

8. Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

9. Que vaut N^n pour un entier $n \geqslant 2$? Aucune justification n'est demandée.

10. En déduire l'expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera ses neufs coefficients en fonction de n.

11. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. On pourra utiliser la question 7.

12. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n. On pourra utiliser la question 2.

Exercice 2

Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique lorsqu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Partie I : un exemple

Dans cette partie on considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \mapsto & \binom{4x - 2y}{x + y} \end{array} \right.$.

13. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

14. En considérant le vecteur $v = \binom{1}{0}$, montrer que l'endomorphisme f est cyclique.

15. Existe-t-il un vecteur non nul $w \in E$ non nul tel que $(w, f(w))$ ne soit pas une base de E ?

Partie II : un contre-exemple

Dans cette partie on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $f_M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ canoniquement associé à M (il n'est pas demandé de montrer que f_M est un endomorphisme).

16. Montrer qu'on a $f_M^2 = f_M + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

17. Montrer que la matrice M est inversible et déterminer son inverse.

18. Justifier que l'endomorphisme f_M n'est pas cyclique.

Partie III : un autre exemple

Dans cette partie on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

19. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

20. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Exprimer $\Delta(X^k)$ sous forme développée.

21. Justifier que si $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P(X))) = \deg(P(X)) - 1$.

22. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Exercice 3

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle que, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i, colonne j qui vaut 1.

Partie I : un exemple

Dans cette partie seulement, on suppose $n = 2$. On note $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

23. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

Dans la suite de cette partie, on note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$.

24. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, justifier qu'on a $\varphi(M) = M$ si et seulement si M et P commutent.

25. En déduire les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(M) = M$.

Partie II : automorphismes intérieurs

Dans cette partie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note φ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$

26. Justifier que φ est une application linéaire.

27. Justifier que φ est un automorphisme.

28. Justifier qu'on a : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

Partie III : automorphismes d'anneau

Cette partie établit une réciproque au résultat vu dans la partie précédente. On suppose maintenant que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

On rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i colonne j qui vaut 1.

29. Soient $i,j,k,l \in \{1,\ldots,n\}$. Rappeler sans démonstration la valeur de $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Dans toute la suite, on note $U_{i,j} = \varphi(E_{i,j})$ et $u_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $U_{i,j}$, c'est-à-dire $u_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & U_{i,j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

30. Soient $i,j,k,l \in \{1,\ldots,n\}$. Déduire de la question 29 qu'on a $u_{i,j} \circ u_{k,l} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } j \neq k \\ u_{i,l} \text{ si } j = k \end{array} \right.$.

31. Justifier qu'il existe un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_{1,1}(x) \neq 0$.

Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $\varepsilon_i = u_{i,1}(x)$.

32. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

33. Soient $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Déterminer la matrice de $u_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.

34. En déduire qu'il existe une matrice inversible P vérifiant $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\},\ \varphi(E_{i,j}) = P^{-1}E_{i,j}P$.

35. Pour cette matrice P, montrer finalement qu'on a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = P^{-1}MP$.