Devoir surveillé 7 - Version normale

Correction - 4h

Exercice 1

Soient $J = [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies sur J par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. À $x \in J$ fixé, la suite $\big(|f_n(x)|\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et de limite nulle. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées et est ainsi convergente, d'où la convergence simple de la série $\sum f_n$.

2. Pour $x \in J$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{nx}}$, terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 < 1$). Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge-t-elle absolument en aucun point et donc *a fortiori* pas normalement sur J (ni sur aucun intervalle, d'ailleurs).

3. Pour $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, la majoration du reste par le critère spécial et la décroissance de $|f_n|$ donnent

$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur J.

4. La convergence uniforme permet d'utiliser le théorème de la double limite. Ainsi, en utilisant le symbole de Kronecker,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} = 1.$$

5.1. La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann alternée ; elle vérifie les hypothèses du critère spécial (signe alterné, valeur absolue décroissante et de limite nulle) et est donc convergente.

5.2. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, de dérivée $h'(t) = -\dfrac{1}{2t^{3/2}}$ donne

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{2(nx)^{3/2}} \qquad \therefore$$

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right]$$

$$\left|\varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{2x^{3/2}} \qquad \therefore$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Exercice 2

1. On utilise la bilinéarité de Φ et son caractère symétrique. Il vient

$$\begin{aligned}\Phi\big(x_1\vec{\imath}+x_2\vec{\jmath},\, y_1\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}\big) &= x_1y_1\Phi\big(\vec{\imath},\vec{\imath}\big)+x_2y_2\Phi\big(\vec{\jmath},\vec{\jmath}\big)+x_1y_2\Phi\big(\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)+x_2y_1\Phi\big(\vec{\jmath},\vec{\imath}\big)\\ &= x_1y_1+x_2y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\theta\\ &= \begin{pmatrix}x_1 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette expression matricielle peut s'avérer pratique.

2. Pour montrer que Φ est un produit scalaire, il reste à étudier $\Phi\big(\vec{X},\vec{X}\big)$.

$$\begin{aligned}\Phi\big(\vec{X},\vec{X}\big) = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cos\theta &= \big(|x_1|-|x_2|\big)^2+2|x_1x_2|(1\pm\cos\theta)\\ &\geqslant \big(|x_1|-|x_2|\big)^2+2|x_1x_2|\big(1-|\cos\theta|\big)\geqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, $\Phi\big(\vec{X},\vec{X}\big)$ étant la somme de deux quantités positives et l'hypothèse $0<\theta<\pi$ assurant que $|\cos\theta|<1$, elle est nulle si, et seulement si, $|x_1|=|x_2|$ et $|x_1x_2|=0$, donc si, et seulement si $\vec{X}=\vec{0}$. Ainsi, Φ est bien un produit scalaire sur E. (On pouvait aussi écrire plus naturellement $\Phi\big(\vec{X},\vec{X}\big)=(x_1+x_2\cos\theta)^2+(1-\cos^2\theta)x_2^2$).

3. Pour $\vec{X}=x_1\vec{\imath}+x_2\vec{\jmath}$, on calcule

$$\begin{aligned}f\big(\vec{X}\big) &= x_1\vec{\jmath}+x_2\big(-\vec{\imath}+2\cos\theta\vec{\jmath}\big)=-x_2\vec{\imath}+\big(x_1+2\cos\theta x_2\big)\vec{\jmath}\\ \Phi\left(f\big(\vec{X}\big),f\big(\vec{X}\big)\right) &= (-x_2)^2+\big(x_1+2\cos\theta x_2\big)^2-2x_2\big(x_1+2\cos\theta x_2\big)\cos\theta\\ &= x_1^2+(1+4\cos^2\theta-4\cos^2\theta)x_2^2+(4-2)\cos\theta x_1x_2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cos\theta=\Phi\big(\vec{X},\vec{X}\big).\end{aligned}$$

4. On utilise le procédé de Gram-Schmidt en orthonormalisant la base $\big(\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)$. Par hypothèse, $\Phi\left(\vec{\imath},\vec{\imath}\right)=1$, donc $\vec{\imath}$ est bien de norme 1. On pose $\vec{k}'=\vec{\jmath}-\Phi\big(\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)\vec{\imath}=\vec{\jmath}-\cos\theta\vec{\imath}$. Par construction, $\Phi\big(\vec{\imath},\vec{k}'\big)=0$ et l'on calcule $\Phi\big(\vec{\jmath},\vec{k}'\big)=1-\cos^2\theta>0$. On prend alors finalement

$$\vec{k}=\frac{\vec{k}'}{\sqrt{\Phi\big(\vec{k}',\vec{k}'\big)}}=\frac{\vec{k}'}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\vec{\imath}+\frac{1}{\sin\theta}\,\vec{\jmath}.$$

5. La première colonne de la matrice C donne $f\big(\vec{\imath}\big)=\vec{\jmath}$ et l'on a par ailleurs $\vec{\jmath}=\sin\theta\vec{k}+\cos\theta\vec{\imath}$. Dans la base $\big(\vec{\imath},\vec{k}\big)$, la matrice de f est donc une matrice orthogonale dont la première colonne est $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^T$ et qui est de déterminant $\det(C)=1$. On a donc $\mathrm{mat}_{(\vec{\imath},\vec{k})}(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et f est la rotation d'angle θ.

On peut aussi (mais c'est plus long) utiliser la formule de changement de base, poser $P=\begin{pmatrix}1 & -\cos\theta/\sin\theta\\ 0 & 1/\sin\theta\end{pmatrix}$, calculer $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}$, puis

$$\mathrm{mat}_{(\vec{\imath},\vec{k})}(f)=P^{-1}CP=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\cos\theta/\sin\theta\\ 0 & 1/\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

6. Si f est la rotation d'angle θ, f^m est celle d'angle $m\theta$ (pour $m\in\mathbb{N}^*$, et même pour tout $m\in\mathbb{Z}$). Ainsi, $f^m=\mathrm{id}_E$ si, et seulement si, $m\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$, soit, compte tenu de ce que $\theta>0$, pour $\theta\in\left\{\dfrac{2k\pi}{m}\ ;\ k\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 3

1. Pour x dans $\mathbb{R}$ on a
$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ -1 & x+2 & -1 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ x & x+2 & -1 \\ x & -1 & x+1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$
$$\chi_A(x) = x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+3 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$
$$\boxed{\chi_A = X\,(X+1)\,(X+3),\ \mathrm{Sp}(A) = \{0,-1,-3\}}\ .$$

2. La matrice A étant symétrique et réelle, elle est ortho-diagonalisable. Il y a trois valeurs propres simples et il suffit de normer les vecteurs de bases choisis pour les trois droites propres pour obtenir les colonnes d'une matrice P qui convient.

   Pour la valeur propre 0 (somme constante des lignes), il suffit de prendre le vecteur $(1,1,1)^T$, donc $\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1)^T$.

   Avec $A+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le sous-espace propre est la droite d'équation $\begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$ engendrée par le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,-1)^T$.

   Les sous-espaces propres étant orthogonaux on peut prendre pour troisième vecteur le produit vectoriel des deux premiers *(programme de mathématiques pour la physique et les sciences de l'ingénieur)* et on obtient $\frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1,2,-1)^T$.

   (si on ne veut faire cela on résout $(A+3\,I_3)\,X = 0$)

   Ainsi, avec $\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})}$ on obtient
$$\boxed{P^T\,A\,P = P^{-1}\,A\,P = D = \mathrm{diag}(0,-1,-3)}\ .$$

3. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ est non vide car il contient au moins toutes les matrices scalaires, dont O et I_3, et aussi toutes les puissances de A (et les polynômes en A ...)

   Si $(B,C) \in \mathcal{A}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a
$$(\alpha\,B + \beta\,C)\,A = \alpha\,B\,A + \beta\,C\,A = \alpha\,A\,B + \beta\,A\,C = A\,(\alpha\,B + \beta\,C),$$
   ce qui donne $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ sous-espace vectoriel de de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

   (c'est même une sous-algèbre ...)

4. Avec $A\,A^k = A^{k+1} = A^k\,A$ pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a $A^k \in \mathcal{A}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$, donc, comme $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel, $\boxed{F \subset \mathcal{C}(A)}$.

5. Avec $A = P\,D\,P^T$ on a $B\,A = A\,B \iff B\,P\,D\,P^T = P\,D\,P^T\,B$, c'est-à-dire, en multipliant à gauche par $P^T = P^{-1}$ et à droite par P,
$$\boxed{B\,A = A\,B \iff (P^T\,B\,P)\,D = D\,(P^T\,B\,P)}\ .$$

6. En notant $C = P^T\,B\,P$, comme la matrice D est diagonale à termes diagonaux distincts, avec $C\,D = D\,C$ on a C diagonale.

   (si $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, on a $C\,D = (\alpha_j\,c_{i,j})$ et $D\,C = (\alpha_i\,c_{i,j})$, donc $(\alpha_i - \alpha_j)\,c_{i,j} = 0$ pour tout (i,j) dans $[\![1,3]\!]^2$ et alors $i \neq j$ entraine $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$ donc $c_{i,j} = 0$, ce qui signifie que C est diagonale)

   Comme les matrices diagonales commutent entre elles, on a donc
$$C\,D = D\,C \iff C \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R}),$$

où $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace de dimension 3 des matrices diagonales :

$$\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}).$$

($\left(E_{i,j} = (\delta_{i,k}\, \delta_{j,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Avec l'équivalence établie ci-dessus, on a donc

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(P\, E_{1,1}\, P^T, P\, E_{2,2}\, P^T, P\, E_{3,3}\, P^T).$$

L'application $M \mapsto P\, M\, P^{-1}$ est un automorphisme (intérieur) donc la famille libre $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est transformée en une famille libre et finalement

$$\boxed{\dim(\mathcal{C}(A)) = 3}\ .$$

7. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples donc c'est aussi le polynôme minimal, ce qui signifie que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à 3, donc

   la condition $\alpha\, I_3 + \beta\, A + \gamma\, A^2 = 0$ entraine $\alpha = \beta = \gamma = 0$:

   la famille (I_3, A, A^2) est libre donc $\dim(F) = 3$ et avec $F \subset \mathcal{C}(A)$ on a

   $$\boxed{F = \mathcal{C}(A)}\ .$$

8. On pourrait faire : avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_A(A) = 0$ et avec $\chi_A = X^3 + 4\, X^2 + 3\, X$ on obtient $A^3 = -4\, A^2 - 3\, A \in F$.

   Ici, avec tout ce qui précède on peut dire $\boxed{A^3 \in \mathcal{C}(A) = F}$.

9. Si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la famille des vecteurs propres retenus en 2 (P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$). La matrice U de p dans cette base est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, 0, 0)$ car $\ker(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $\ker(A)^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Cette matrice commute avec D donc $P\, U\, P^T$ commute avec A (d'après q.5), or $P\, U\, P^T$ est la matrice B de p dans la base canonique : $\boxed{B \in \mathcal{C}^A}$.

Exercice 4

Q1: On a $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de α donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Q2: D'après ce qui précède, $\|u_n\|_\infty \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Q3: Posons $v_n(x) = \dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}$. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp\left(\alpha e^{ix}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\left(v_n(x)\right) = u_n(x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$. Or $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = \exp\left(\alpha\cos(x) + i\alpha\sin(x)\right) = e^{\alpha\cos(x)} e^{i\alpha\sin(x)}$ donc $C(x) = e^{\alpha\cos(x)}\cos\left(\alpha\sin(x)\right)$.

Q4.1: On a $J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, dx$ et $x \mapsto \sin(nx)\, C(x)$ est impaire car C est paire donc $J_n = 0$. On a $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \cos(nx)\, u_k(x)\, dx$. On pose $w_k(x) = \cos(nx)\, u_k(x)$. On a $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc la série de fonctions $\sum w_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions w_k sont continues. On en déduit que $I_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx$. Or, $w_k(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)\cos(kx)}{k!} = \dfrac{\alpha^n}{2k!}\left(\cos(k+n)(x) + \cos(k-n)(x)\right)$ donc $\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx = 0$ si $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\, dx = \dfrac{\alpha^n}{2n!}\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$ donc $I_n = \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$.

Q4.2: On a $J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (car $\sum \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$ converge).

Q5: On a $\cos^2(nx) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!} + \dfrac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!}$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n}{2n!} = \dfrac{e^\alpha}{2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!} = C(2x)$ donc la série $\sum \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ converge et $S(x) = \dfrac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha \cos(2x)} \cos(\alpha \sin(2x))$.

Exercice 5

25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x)^2 - x = \frac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}) - x = \frac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2} - 2x) = \frac{1}{4}(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)})^2 \geq 0$.
    Ensuite comme $f_k(x)^2 - x = (f_k(x) - \sqrt{x})(f_k(x) + \sqrt{x})$ et $f_k(x) + \sqrt{x} > 0$ on obtient bien $f_k(x) - \sqrt{x} \geq 0$.
26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}(\frac{x}{f_{k-1}(x)} - f_{k-1}(x)) = \frac{1}{2}(\frac{x - f_{k-1}(x)^2}{f_{k-1}(x)})$.
    On utilise alors **Q25** qui assure que $x - f_{k-1}(x)^2 \leq 0$ et donc que $f_k(x) - f_{k-1}(x) \leq 0$.
    Ainsi $(f_k(x))_{k \geq 1}$ est bien décroissante.
27. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ "fixé". La suite $(f_k(x))_{k\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 ou mieux par $\sqrt{x}$, elle converge donc par théorème des suites monotones vers une limite que je note $\ell(x)$.
    Cas $x > 0$, $\ell(x) \geq \sqrt{x} > 0$. Je peux donc passer à la limite dans la relation de récurrence qui par unicité de la limite donne $\ell(x) = \frac{1}{2}(\ell(x) + \frac{x}{\ell(x)})$, qui donne $\ell(x)^2 = x$, soit $\ell(x) = \sqrt{x}$, puisque $\ell(x) > 0$.
    Le cas $x = 0$ correspond à une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ convergente vers 0.
    On a bien montré la convergence simple de (f_k) vers la fonction racine carrée.
28. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$. J'applique la formule de récurrence au rang $k+1$,
    $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}) - \sqrt{x} = \frac{1}{2f_k(x)}(f_k(x)^2 + x - 2\sqrt{x}f_k(x)) = \frac{1}{2f_k(x)}(f_k(x) - \sqrt{x})^2$
    ce qui est l'égalité demandée.
29. D'abord je remarque que par **Q25**, $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$.
    Ensuite montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
    Amorce : $0 \leq f_1(x) - \sqrt{x} \leq f_1(x) = \frac{1+x}{2}$
    Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons l'inégalité vraie au rang k. J'utilise alors **Q28** et le fait que $0 \leq (1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}) \leq 1$, ce qui me donne bien $0 \leq f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2^{k+1}}$.
    Conclusion : Par principe de récurrence est bien vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie II. Généralités sur les racines carrées d'une matrice

30. Si A admet une racine carrée, il existe donc une matrice B réelle telle que $A = B^2$. Mais alors $det(A) = det(B^2) = det(B)^2 \geq 0$.
31. Suivons la démarche de l'énoncé. Supposons qu'il existe une racine carrée de A. Notons la $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
    On a alors $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$
    L'égalité $B^2 = A$ conduit à $b(a+d) = 1$ et $c(a+d) = 0$ ce qui impose $c = 0$, puis $a^2 = d^2 = 0$ ce qui conduit à $a + d = 0$ contradiction avec $b(a+d) = 1$.
    Il n'y a donc pas de racine carrée pour A.

32. S est une matrice symétrique réelle, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ de plus il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S.
33. Tout d'abord comme P est orthogonale, $P^{-1} = P^T$. J'utiliserai l'une ou l'autre suivant la situation. Ainsi $R = P\Delta P^T$ donne $R^T = P^T \Delta^T P = R$ (Δ est diagonale, donc $\Delta^T = \Delta$). Puis $R^2 = RR = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} = S$, puisque $\Delta^2 = D$.