Dec. 2023

Correction devoir surveillé 6

Calculatrice interdite

Probabilité - espaces vectoriels euclidiens

Exercice 1

$M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \quad < A|B >= \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
$D_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$ et est de cardinal n donc $D_n(\mathbb{R})$ est de dimension n.
Alors $D_n(\mathbb{R})^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$, donc

$$\dim(D_n(\mathbb{R})^\perp) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(D_n(\mathbb{R})) = n^2 - n.$$

Posons $F = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathrm{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\})$.
$(E_{i,i})_{(i,j)\in[|1,n|]^2, i\neq j}$ est une base de F et est de cardinal n^2-n donc F est de dimension n^2-n.

$$\forall A \in F, \quad \forall B \in D_n(\mathbb{R}), \quad < A|B >= \sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{i,i}}_{=0} b_{i,i} + \sum_{i\neq j} a_{i,j} \underbrace{b_{i,j}}_{=0} = 0.$$

Donc $F \subset D_n(\mathbb{R})^\perp$. De plus ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension n^2-n, donc sont égaux.
Finalement $\boxed{D_n(\mathbb{R})^\perp = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathrm{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\}).}$

Exercice 2

Q1. ▷ Pour tout P, Q dans E on a $P(x)Q(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et l'application $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est bien définie.

▷ La linéarité de l'intégrale entraine la bilinéarité de $\langle . \mid . \rangle$.

▷ La symétrie de $\langle . \mid . \rangle$ est évidente .

▷ On a $\langle P \mid P\rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \geq 0$ car $P^2(x)e^{-x} \geq 0 \ \ \forall x \in [0,+\infty[$.

▷ Si $\langle P \mid P\rangle = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$, comme la fonction $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est continue positive alors elle s'annule sur $[0,+\infty[$ par suite P s'annule sur $[0,+\infty[$ donc P est le polynôme nul *(car il admet une infinité de racines)*

Finalement l'application $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q2. $\triangleright$ Cherchons une base orthonormée de $F=\mathbb{R}_1[X]$:

Posons $P_0=1$ et $P_1=X+a$ tels que $\langle P_0 \mid P_1\rangle=0$, alors on a :

$$\langle X+a \mid 1\rangle=\langle X \mid 1\rangle+a\langle 1 \mid 1\rangle=0$$

de plus $\langle 1 \mid 1\rangle=\int_0^{+\infty} e^{-x} dx=1$ et $\langle X \mid 1\rangle=\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx=1$, donc $a=-1$ et $R=X-1$.
La famille (P_0, P_1) est orthogonale , de plus on a $\|P_0\|=1$ et

$$\begin{aligned}
\|P_1\|^2 & =\int_0^{+\infty}(x-1)^2 e^{-x} dx \\
& =\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx-2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx+\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
& =1
\end{aligned}$$

Donc la famille (P_0, P_1) est orthonormée , par suite c'est une base orthonormée de F.

$\triangleright$ On a $P_F\left(X^2\right)=\langle X^2 \mid P_0\rangle P_0+\langle X^2 \mid P_1\rangle P_1$, avec :

$$\begin{aligned}
\langle X^2 & \mid & P_0\rangle=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx=2 \\
\langle X^2 & \mid & P_1\rangle=\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx-\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx=4
\end{aligned}$$

donc $\boxed{P_F\left(X^2\right)=2 P_0+4 P_1=4 X-2}$.

Q3. $\triangleright$ Ecrivons $\|X^2\|^2=\|(X^2-P_F(X^2))+P_F(X^2)\|^2$ et on sait que $P_F\left(X^2\right)$ est l'unique élément de F tel que $X^2-P_F\left(X^2\right)$ est dans $F^{\perp}$ donc $P_F\left(X^2\right) \perp\left(X^2-P_F\left(X^2\right)\right)$, le théorème de Pythagore donne :

$$\left\|X^2-P_F\left(X^2\right)\right\|^2=\left\|X^2\right\|^2-\left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$$

$\triangleright$ On a

$$\begin{aligned}
\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}\left(x^2-a x-b\right)^2 e^{-x} \mathrm{~d} x & =\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2}\left\|X^2-(a X+b)\right\|^2 \\
& =d^2(X^2, F)
\end{aligned}$$

d'après le théorème de la projection orthogonale on a $d^2(X^2, F)=\|X^2-P_F(X^2)\|^2$, donc

$$d^2(X^2, F)=\left\|X^2\right\|^2-\left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2$$

le calcul donne :

$$\begin{aligned}
\left\|X^2\right\|^2 & =\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx=24 \\
\left\|P_F\left(X^2\right)\right\|^2 & =\int_0^{+\infty}(4 x-2)^2 e^{-x} dx \\
& =16 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx-16 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx+4 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
& =20
\end{aligned}$$

d'où

$$\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}\left(x^2-a x-b\right)^2 e^{-x} \mathrm{~d} x=d^2(X^2, F)=4$$

Exercice 3

Q4. $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$, on a $T \leq Z$ donc :

- ▷ Si $m < n$ alors $\mathbb{P}([Z = m] \cap [T = n]) = 0$.
- ▷ Si $m > n$ alors

$$[Z = m] \cap [T = n] = ([X = m] \cap [Y = n]) \cup ([X = n] \cap [Y = m])$$

c'est une réunion d'événements disjoints ainsi

$$\mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right) = \mathbb{P}\left([X = m] \cap [Y = n]\right) + \mathbb{P}\left([X = n] \cap [Y = m]\right)$$

par indépendance de X et Y on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right) &= \mathbb{P}\left([X = m]\right)\mathbb{P}\left([Y = n]\right) + \mathbb{P}\left([X = n]\right)\mathbb{P}\left([Y = m]\right) \\ &= 2p^2q^{n+m} \end{aligned}$$

- ▷ Si $m = n$ alors

$$[Z = n] \cap [T = n] = ([X = n] \cap [Y = n])$$

et

$$\mathbb{P}\left([Z = n] \cap [T = n]\right) = \mathbb{P}\left([X = n] \cap [Y = n]\right)$$

l'indépendance de X et Y donne

$$\mathbb{P}\left([Z = n] \cap [T = n]\right) = \mathbb{P}\left([X = n]\right)\mathbb{P}\left([Y = n]\right) = p^2q^{2n}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ p^2q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m > n \end{cases}$$

Q5. La famille $([T = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}\left(Z = m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right)$$

or si $m < n$ $\mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right) = 0$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z = m\right) &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}\left([Z = m] \cap [T = n]\right) \\ &= p^2q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} \\ &= p^2q^{2m} + 2p^2q^m\frac{1-q^m}{1-q} \end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}\left(Z = m\right) = pq^m\ \left(2 - (q+1)q^m\right)}$

Problème

Partie I-Préliminaires

1. $X_1(\Omega)) = \{0,1\}$. X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_1 = 1)$.
   Et $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$, puisqu'il y a au départ b boules blanches sur un total de $b+r$ boules dans l'urne, et équiprobabilité de tirage de chaque boule.
   Conclusion X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{b}{b+r}$. (résultat confirmé par Q6)
2. $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$ car cela correspond à un tirage d'une boule blanche dans une urne contenant $b+1$ blanches sur un total de $b+r+1$ boules.
   De même $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \dfrac{r}{b+r+1}$, ici tirage d'une boule rouge d'une urne contenant r rouges sur un total de $b+r+1$ boules.
   La loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
   Ensuite $X_2(\Omega) = \{0,1\}$. X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_2 = 1)$.
   J'utilise alors la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$. Ce qui donne :
   $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)$.
   J'ai obtenu $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$, de même j'ai $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \dfrac{b}{b+r+1}$, ainsi avec la **Q1** $P(X_2 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}\dfrac{b}{b+r} + \dfrac{b}{b+r+1}\dfrac{r}{b+r} = \dfrac{b}{b+r}$
   Conclusion X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{b}{b+r}$. (résultat confirmé par **Q6**)
3. S_n renvoie le nombre de boules blanches après le n ème tirage, et vu qu'il y a au départ b boules blanches et qu'à chaque tirage on peut avoir une boule blanche ou rouge : $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$.

Partie II-La loi de X_n

4. $P(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \dfrac{k}{b+r+n}$. En effet correspond à une urne contenant k boules blanches sur un total de $b+r+n$ boules.
5. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((S_n = k)_{b \leq k \leq n+b})$
   $P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} P(X_{n+1} = 1|S_n = k)P(S_n = k)$, donc avec le résultat de **Q4**
   $P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} \dfrac{k}{b+r+n} P(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n} \sum\limits_{k=b}^{n+b} kP(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n} E(S_n)$ ce qui est le résultat demandé.
6. Montrons par récurrence (forte) sur $n \in \mathbb{N}^*$ que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
   Amorce : $n = 1$. C'est vrai par la **Q1**.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.
   D'abord $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$, donc X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_{n+1} = 1)$.

Ensuite par linéarité de l'espérance et hypothèse de récurrence (forte), $E(S_n) = b + n\dfrac{b}{b+r} = b\dfrac{b+r+n}{b+r}$, qu'il suffit de remplacer dans le résultat de la **Q5**, qui donne bien $P(X_{n+1}) = \dfrac{b}{b+r}$.
Conclusion : Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III-La loi de S_n dans un cas particulier

7. Vu que $b = 1$, $S_n = 1$ correspond à "on n'a tiré que des boules rouges aux n premiers tirages", soit $(S_n = 1) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0))$
8. Les évènements $(X_k = 0)$ ne sont pas indépendants. J'utilise la formule des probabilités composées qui donne :
$P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)) =$
$P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0|X_1 = 0) \times \ldots P(X_n = 0|(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0))$.
Encore une fois ces probabilités conditionnelles s'interprètent :
$P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \dfrac{2}{3}$, $P(X_n = 0|(X_1 = 0)\cap(X_2 = 0)\cap\cdots\cap(X_{n-1} = 0)) = \dfrac{n}{n+1}$.
Et ainsi les produits se simplifient et donnent bien la formule demandée.
9. Si $S_{n+1} = k$, alors forcément $S_n = k$ ou $S_n = k - 1$. Ainsi la probabilité pour (i) est nulle.
Ensuite pour (ii) et (iii) toujours par interprétation du conditionnement :
$P(S_{n+1} = k|S_n = k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$ correspond à une urne de $n+2$ boules dont $k-1$ sont blanches dont on tire une boule blanche.
$P(S_{n+1} = k|S_n = k) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$ correspond à une urne de $n+2$ boules dont k sont blanches, donc $n+2-k$ rouges, dont on tire une rouge.
10. Tout est fait. C'est la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $((S_n = \ell))_{1\leq \ell \leq n+1}$.
On peut remarquer que les deux cas $S_{n+1} = 1$ et $S_{n+1} = n+2$ ont déjà été réglés par **Q8**.
11. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
Amorce : $S_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$, et : $(S_1 = 1) = (X_1 = 0)$, donc avec **Q1** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$.
$(S_1 = 2) = (X_1 = 1)$, donc avec **Q1** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Donc X_1 suit bien une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que S_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
D'abord $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ par **Q3**.
Ensuite **Q8** répond à $P(S_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+2}$ et $P(S_{n+1} = n+2) = \dfrac{1}{n+2}$.
Puis l'hypothèse de récurrence et la **Q10** répondent aux autres valeurs.
Pour $k \in [\![2, n+1]\!], P(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n+2-k}{n+2}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$.
Ainsi S_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$.
Conclusion : Le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par principe de récurrence.