2023-2024 # Devoir surveillé 5 - Version normale PSI

Séries - Préhilbertiens réels- 4h

Problème

2. On prend $x = -1/2$ dans la relation précédente, on obtient $-\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^k}{k} \iff \boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k k}}$.

3. (a) Posons $u_k = \frac{1}{k(k+1)} \neq 0$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\sim} 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{\sum_{k\geq 1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \text{ a pour rayon de convergence } 1}$.

   De plus, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.

   Donc, pour tout $k \geq 1$, $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x.\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

   Or, d'après la question 1. en remplaçant x par $-x$, on obtient $-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \ln(1-x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{+\infty}\frac{x^\ell}{\ell} = -\ln(1-x) - x$.

   En conclusion,

   $$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} =} x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = \boxed{(1-x)\ln(1-x) + x}$$

   $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[}$.

   (b) En prenant $x = 1/2$ dans la relation précédente, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$,

   ainsi, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln(2)}$.

4. (a) $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, donc, $\boxed{\text{d'après le théorème spécial des séries alternées, } \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ est une série alternée avec $\left(\frac{x^k}{k}\right)_{k\geq 1}$ suite décroissante qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

   Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}}$

   car, $|x| = x \leq 1$.

Partie II.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{n2^{n+1}n!}} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{n.2^{n+1}n!2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} = \frac{(2n)!}{n.2^{n+1}n!.2^n!} = \boxed{\frac{(2n)!}{n.2^{2n+1}.(n!)^2}}.$$

(b) Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$.

(c) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}}{n.2^{2n+1}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}n^{2n}2\sqrt{n\pi}}{n.2^{2n+1}n^{2n}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}.n^{3/2}}$.

Or, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$.

D'après le critère de l'équivalent des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)(1-\sin^(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. On fait une intégration par parties $u'(x) = \sin^{2n}(x)\cos(x)$, $v(x) = \cos(x)$, $u(x) = \dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Ainsi, $\boxed{I_n - I_{n+1}} = \left[\dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x \boxed{= \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}}$.

(b) D'après la question précédente, $I_{n+1} = \dfrac{(2n+1)I_n}{2n+2}$.

D'où, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(2n-1)\ldots(5).(3).(1)}{(2n).(2n-2)\ldots(4).(2)}I_0$.

Or, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$, donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n.n!}\dfrac{\pi}{2} = n\pi a_n}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$.

On sait que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{y^n}{n}$ est une série entière de rayon de convergence 1 et, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$.

On a pour tout $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin^2(x_0)| < 1$, donc,

$\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = -\ln(1-\sin^2(x_0)) = -\ln(\cos^2(x_0)) = -2\ln(\cos(x_0))$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de fonction } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge simplement vers la fonction } f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\ln(\cos(x)) \end{array}}$

(b) Appliquons le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur vers $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers f qui est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

  $\sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin^{2n}(x)}{n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n} = \sum_{n\geq 1} \pi a_n$ d'après la question II.2.b),

  or, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge d'après II.1.(c). Ainsi, $\sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin^{2n}(x)}{n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n} = \sum_{n\geq 1} \pi a_n$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[}$ et,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n =} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{-2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x}.$$

4. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

   (a) Nous avons montré dans la question précédente que I converge.
   On part de I et on pose $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \mapsto \frac{\pi}{2} - h$ de classe $\mathcal{C}^1$ est bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}h$.
   Ainsi, $\boxed{J \text{ converge et, } I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\right)(-\mathrm{d}h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = J.}$

   (b) $$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(2) + (\sin(2x))\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
   On pose $u = 2x \iff x = \frac{x}{2}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, \pi[$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$.
   Ainsi, $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$.
   On pose $u = \frac{\pi}{2} + v$ dans la dernière intégrale avec $v \mapsto \frac{\pi}{2} + v$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Ainsi, $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right)\right)\mathrm{d}v = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(v))\,\mathrm{d}v$
   $\iff$
   $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}(J + I) \iff \frac{1}{2}(I + J) = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.
   En conclusion, $\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2)}$ car $I = J$.

5. D'après les questions 3.(b) et 4.(b), $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}.I = \frac{\pi^2}{4}\ln(2)}$.

Partie III.

1. (a) $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i}$ converge, et, $\boxed{U_n =} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n+1}} . \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2^n}}$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\frac{1}{2^k} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = U_{k-1} - U_k}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k.2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}(U_{k-1} - U_k)$.

   D'après I.2., $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k.2^k} = \sum_{k\geq 1} \frac{U_k}{k}$ converge.

   Ainsi, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k}$, on pose $j = k-1$ dans la première somme, on obtient $R_n = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{U_j}{j+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} = \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k . \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$ en posant $k = j$ dans la première somme.

   Ce nous donne $\boxed{R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}}$

   (c) Lorsque k tend vers $+\infty$, $\frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)2^k} = \circ\left(\frac{1}{k.2^k}\right) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n_0$, $0 \leq \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon \frac{1}{k.2^k}$.

   Ainsi, étant donné que les séries convergent d'après la partie I., en sommant les inégalités, pour $k \geq n$ avec $n \geq n_0$, $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k.2^k} = R_n$.

   Ceci nous permet d'en conclure que :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)}.$$

   (d) D'après les deux questions précédente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \frac{U_n}{n+1} - R_n = \circ(R_n) \iff \frac{U_n}{n+1} = R_n + \circ(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n.$$

   Ainsi, $\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n.2^n}}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in [0,1]$, donc, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$, et,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}}$$

   (b) On intègre des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

Soit, en posant $j=k+1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\underbrace{\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}}_{=\ln(2)}-\underbrace{\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}}_{=S_n}=\ln(2)-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

$\iff \boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$.

(c) On fait une intégration par parties en posant $u(t)=\frac{1}{1+t}$, $v'(t)=t^n$, $u'(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}$ et $v(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}$ avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Or, $u(0)v(0)=0$ et $u(1)v(1)=-\frac{1}{2(n+1)}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t}$.

(d) Nous avons $\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{2n}$, et, $0\le\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

D'où, $\dfrac{(-1)^n}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\circ\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=\circ\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, ainsi, $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{2n}}$.

3. (a) Nous avons montré en II.1.(c) que $a_k\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall k\ge N}$, $|2a_k\pi k^{3/2}-1|\le\varepsilon\iff 1-\varepsilon\le 2a_k\pi k^{3/2}\le 1+\varepsilon$.

Or, $\pi k^{3/2}>0$, donc,

$$\boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac32}}\le a_k\le(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac32}}}$$

(b) Pour tout entier $k\ge 2$, on a $\forall t\in[k-1,k]$, $\frac{1}{k^{\frac32}}\le\frac{1}{t^{\frac32}}$, en intégrant sur $[k-1,k]$, on obtient $\dfrac{1}{k^{\frac32}}\le\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}$.

De même, $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{t^{\frac32}}\le\frac{1}{k^{\frac32}}$, en intégrant sur $[k,k+1]$, on obtient $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}\le\frac{1}{k^{\frac32}}$.

En conclusion, $\boxed{\forall k\ge 2,\quad ,\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}\le\frac{1}{k^{\frac32}}\le\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}}$.

(c) D'après les deux questions précédentes, $\forall k\ge N$, quitte à supposer $\varepsilon<1$,
$(1-\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}\le(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac32}}\le a_k\le(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac32}}\le(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}$.

Etant donné que $\sum a_n$ converge et que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge, alors, pour tout $n\ge N$, en sommant les inégalités pour k compris entre $n+1$ et $+\infty$, on obtient :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}\le\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\le(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}.$$

$$\iff\boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}\le T_n\le(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}}$$

(d) On a $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac32}}=\int_n^{+\infty}t^{-\frac32}\,\mathrm{d}t=\left[-2t^{-\frac12}\right]_n^{+\infty}=\frac{2}{n^{\frac12}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, avec la question précédente, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n\ge N$,
$(1-\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\le T_n\le(1+\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{2}{\sqrt{n}}\iff(1-\varepsilon)\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}\le T_n\le(1+\varepsilon)\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Etant donné que $\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, on en conclut que :

$$\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}.$$

4. En procédant comme en III.1. et en partant de $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$, on obtient :
$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}-U_k}{k(k+1)} = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{U_j}{(j+2)(j+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$ en posant $j = k-1$ dans la première somme, car les séries convergent toutes d'après la partie I.
$V_n = \frac{U_n}{(n+2)(n+1)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) = \frac{U_n}{(n+2)(n+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)}$.
En procédant comme en III.1.c), on montre que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)} = \circ(V_n)$.
Ainsi, $V_n + \circ(V_n) = \frac{U_n}{(n+2)(n+1)}$, d'où, $\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{U_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}}$.

5. Nous avons trouvé les équivalents suivants des restes des quatre séries convergentes :
$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$, $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 2^n}$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$ et $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
Or, $\frac{1}{n^2 2^n} = o\left(\frac{1}{n2^n}\right)$, $\frac{1}{n2^n} = o\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)$ et $\frac{(-1)^n}{2n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$.
Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k} \text{ est celle qui converge le plus rapidement}}$ et,
$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 1} a_k \text{ qui converge le moins rapidement}}$.

Exercice 2

Correction DS 4

Exercice 1.

1 Mq E sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

- $E \neq \emptyset$ car la suite nulle est bornée.
- $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$
- Soit $\begin{cases} (u_n)\ (v_n) \text{ bornée } (1) \\ \lambda, \mu \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \exists M_1, M_2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M_1 \quad |v_n| \leq M_2$

Donc $|\lambda u_n + \mu v_n| \underset{IT}{\leq} |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n| \leq |\lambda| M_1 + |\mu| M_2$.

Ainsi $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est bornée.

E est donc un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

2. Notons (v_i) la suite nulle sauf en i position où elle vaut 1. La famille $(v_0, v_1, v_2 \ldots)$ est libre (facile)

- De plus si E est de DF alors les familles libres ont moins de vecteur que dim E. Ainsi E est de DI.

3 Notons M_1, M_2 tq $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq M_1,\ |v_n| \leq M_2$.

$$\begin{cases} \dfrac{u_n v_n}{2^n} \leq \dfrac{M_1 M_2}{2^n} \\ \text{les séries sont positives} \\ M_1 M_2 \sum \frac{1}{2^n} \text{ est une série géométrique conv. } (|\tfrac{1}{2}|<1) \end{cases}$$

D'après le th de comparaison, on a $\sum \frac{u_n v_n}{2^n}$ cvg.

4 $(\cdot\,|\,\cdot)$ est clairement bilinéaire symétrique et positive. Vérifions définie positive :

$$(u\,|\,u) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{u_n^2}{2^n}}_{\oplus} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \frac{u_n^2}{2^n} = 0 \Rightarrow u = 0$$

5 $\|U\|^2 = \frac{1^2}{2^0} + \frac{0^2}{2^1} + \frac{0^2}{2^2} + \ldots = 1 \Rightarrow \|U\| = 1$

$\|V\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \|V\| = \sqrt{2}$.

6 $V' = V - \left(V \,\middle|\, \frac{U}{\|U\|}\right) \frac{U}{\|U\|} = V - \frac{1}{1^2} U$.

Ainsi $\begin{cases} V'_0 = 0 \\ V'_n = 1 \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

$$\|V'\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc (U, V') est une BON de F.

7. F est de DF donc p_F existe.

- De plus $p_{F^\perp} = I - p_F$ existe puisque p_F existe.

8 D'après l'expression du projeté orthogonal.

$$p_F(w) = (w\,|\,U)\,U + (w\,|\,V')\,V'$$

$$p_F(w) = \left(\frac{2}{3}\right)^0 V + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k V'$$

$$\Rightarrow p_F(w) = V + \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} V'$$

Ainsi :
$$\begin{cases} \left(p_F(w)\right)_0 = 1 \\ \left(p_F(w)\right)_n = 2 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 2

$\boxed{\text{a}}$ On a :

$$\begin{cases} \left|\frac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \\ \text{Les séries sont à termes positifs} \\ \text{D'après Riemann la série } \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ est convergente.} \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série (a) converge.

$\boxed{\text{b}}$ Puisque :

$$\sum \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) = \sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a affaire à une série alternée. Elle est donc convergente.

$\boxed{\text{c}}$ A l'aide d'un développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) &= \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}^2}\right)\right) \\ &= \sum \frac{(-1)^n}{n} + \sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

La première série est une série alternée, elle est donc convergente. On compare la seconde série à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ qui converge. Ainsi la seconde série est également convergente grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs. La série (c) est donc convergente car c'est la somme de deux séries convergentes.

$\boxed{\text{d}}$ Grâce à une manipulation sur les puissances, on obtient :

$$\sum \frac{1}{2^{\ln(n)}} = \sum \frac{1}{e^{\ln(2)\ln(n)}} = \sum \frac{1}{n^{\ln(2)}}$$

Ainsi la série est une série de Riemann divergente car $\ln(2) \leq \ln(e) = 1$.