2022-2023

Devoir surveillé 3 - Version normale

PSI

Correction

Exercice 1

$\boxed{1}$ L'intégrale est impropre en 0 et en 1. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{t\ln(t)}{t-1} & \underset{0}{\sim} & -t\ln(t) & \underset{t\to 0}{\overset{\text{CC}}{\longrightarrow}} & 0 \\ \dfrac{t\ln(t)}{t-1} & \underset{1}{\sim} & \dfrac{t(t-1)}{t-1} & \underset{t\to 1}{\longrightarrow} & 1 \end{cases}$$

L'intégrale I_1 est donc faussement impropre en 0 et en 1. Elle est donc convergente.

$\boxed{2}$ L'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparées, on a :

$$t^2.(t^2e^{-t}) \underset{t\to 0}{\overset{\text{CC}}{\longrightarrow}} 0$$

Ainsi :

$$\begin{cases} t^2e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \text{ est convergente} \end{cases}$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale I_2 est convergente.

$\boxed{3}$ L'intégrale est impropre en $+\infty$.

$$\sqrt{1+x^2}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \underset{0}{\sim} x\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ est divergente et que les fonctions sont positives, on conclue à l'aide du théorème de comparaison que :

$$\int_0^{+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)dx$$

est divergente et donc I_3 également.

$\boxed{4}$ L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. En 0, on a :

$$\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ainsi l'intégrale I_{13} est faussement impropre en 0, elle est donc convergente en 0. En $+\infty$:

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par CC}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx \text{ est convergente} \end{cases}$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale I_4 est convergente en $+\infty$. L'intégrale est convergente en 0 et en $+\infty$, elle est donc convergente.

$\boxed{5}$ L'intégrale est impropre en 0 et en 1. En 0 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \ \text{ est convergente} \end{cases}$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale I_{14} est convergente en 0. En 1, effectuons le changement de variable C^1 et strictement décroissant : $T = 1 - t$. On obtient :

$$I_{13} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{T(1-T)}} dT$$

On vient de montrer que cette intégrale est convergente en $T = 0$, ainsi I_5 est convergente en $t = 1$.

$\boxed{6}$ L'intégrale I_6 est impropre en 0 et en $+\infty$. En 0 :

$$\frac{\arctan(x^2)}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, l'intégrale est faussement impropre en 0, elle est donc convergente en 0. En $+\infty$:

$$\frac{\arctan(x^2)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4x^2}$$

Les fonctions sont positives et l'intégrale $\frac{\pi^2}{4} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente. Ainsi l'intégrale I_{15} est convergente en $+\infty$. On conclut que I_6 est convergente.

Exercice 2

Soit A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Notons B la matrice définie par bloc :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

1. Déterminer une relation entre χ_A et χ_B. En déduire que $Sp(A) = Sp(B)$.
2. Notons P_0 le polynôme :

$$P_0 = \prod_{\alpha \in Sp(A)} (X - \alpha)$$

   Montrer que P_0 divise tout polynôme annulateur de A et B.
3. Montrer que pour :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array} \right)$$

4. En déduire que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array} \right)$$

5. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que Q divise XQ'. Montrer que Q est de la forme $Q = aX^n$
6. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Problème