Devoir surveillé 3 - Version difficile

Correction - 4h

A. Equations algébriques réciproques

1. Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $u_n(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

   u_n est linéaire (immédiat) . $u_n^2(P) = u_n\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X)$ pour tout $P \in E_n$

   Donc u_n est une symétrie .

2. Soit $n = \deg(P)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors

   • $P \in \mathcal{P}$ si et seulement si $u_n(P) = P$ ce qui est équivalent à $a_{n-k} = a_k$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$.
   • $P \in \mathcal{D}$ si et seulement si $u_n(P) = -P$ ce qui est équivalent à $a_{n-k} = -a_k$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

3. Notons que si $\deg(R) = n$, alors $R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ si et seulement si $X^n R\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon R(X)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

   Ainsi x est une racine de $R \Leftrightarrow R(x) = 0 \Leftrightarrow x^n R\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow R\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

   Si $R \in \mathcal{D}$, $R(X) = -X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$ donc $R(1) = -R(1)$ ce qui donne que $R(1) = 0$.

   Si $R \in \mathcal{P}$ et $n = \deg(R)$ est impair , alors $R(-1) = (-1)^n R(-1) = -R(-1)$ donc $R(-1) = 0$.

4. Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, avec $P = QR$, $\deg(Q) = n$ et $\deg(R) = m$, donc $p = m + n = \deg(Q)$.

   • Supposons que $Q, R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, $\varepsilon Q(X) = X^n Q\left(\frac{1}{X}\right)$ et $\varepsilon' R(X) = X^m R\left(\frac{1}{X}\right)$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ donc

   $\varepsilon\varepsilon' X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon X^n Q\left(\frac{1}{X}\right) \times \varepsilon' X^m R\left(\frac{1}{X}\right) = Q(X) R(X)$, donc $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$.

   • Supposons que $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ et $Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, alors , il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ tels que : $\varepsilon Q(X) = X^n Q\left(\frac{1}{X}\right)$ et $\varepsilon' P(X) = X^{m+n} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

   On a $\varepsilon' P(X) = X^{m+n} P\left(\frac{1}{X}\right)$ donc $\varepsilon' Q(X) R(X) = X^{m+n} Q\left(\frac{1}{X}\right) R\left(\frac{1}{X}\right) = X^m Q\left(\frac{1}{X}\right) X^n R\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon Q(X) X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$

   Donc $\varepsilon' R(X) = \varepsilon X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$, ce qui donne que $R(X) = \varepsilon' \varepsilon X^n R\left(\frac{1}{X}\right)$. ($\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$ car $\varepsilon \in \{-1, 1\}$).
   Si $\varepsilon\varepsilon' = 1$ c'est-à-dire Q, R sont de même espèce , alors $Q \in \mathcal{P}$.
   Si $\varepsilon\varepsilon' = -1$ c'est-à-dire Q, R sont d'espèces différentes, alors $Q \in \mathcal{D}$.

5. Soit $P \in \mathcal{P}$, on a $X-1 \in \mathcal{D}$, d'après la question précedente , on a $(X-1)\,P \in \mathcal{D}$
Supposons que $D \in \mathcal{D}$, d'après **3**°) , 1 est une racine de P , donc on peut écrire $D=(X-1)\,P$
D'autre part , $D \in \mathcal{D}$ et $(X-1) \in \mathcal{D}$, donc d'après la question précedente $P \in \mathcal{P}$.

6. De même si $\deg(P)=n$ est impair et $P \in \mathcal{P}$, alors d'après 3°) , -1 est une racine de P , on peut écrire $P=(X+1)\,D$
on a $X+1 \in \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}$, donc $D \in \mathcal{P}$.
Réciproquement si $D \in \mathcal{P}$, on a $X+1 \in \mathcal{P}$, donc $(X+1)\,D \in \mathcal{P}$.

7. Remarquons que $(*)\left(X+\dfrac{1}{X}\right)\left(X^p+\dfrac{1}{X^p}\right)=X^{p+1}+\dfrac{1}{X^{p+1}}+X^{p-1}+\dfrac{1}{X^{p-1}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
Posons $P_0=2$, $P_1=X$ et $P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}$, on a $\deg(P_n)=n$.
Pour $n=0$ et $n=1$ c'est vérifiée , supposons que $X^k+\dfrac{1}{X^k}=P_k\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$ pour tout $k \leq n$, alors
d'après $(*)$, $P_{n+1}\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=\left(X+\dfrac{1}{X}\right)\left(X^n+\dfrac{1}{X^n}\right)-\left(X^{n-1}+\dfrac{1}{X^{n-1}}\right)=X^{n+1}+\dfrac{1}{X^{n+1}}$
Reste à établir l'unicité . Suppons qu'il existe T_n tel que : $X^n+\dfrac{1}{X^n}=T_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=P_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$
alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n\left(e^{i\theta}+e^{i-\theta}\right)=P_{nn}\left(e^{i\theta}+e^{i-\theta}\right)$ c'est-à-dire $T_n(2\cos\theta)=P_n(2\cos\theta)$
Les polynômes P_n et T_n coincident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$, donc $P_n=T_n$.

8. Posons $m=\deg(R)$, alors $R(X)=\varepsilon X^n R\left(\dfrac{1}{X}\right)$, si n est impair alors -1 serait une racine (question 3°) ce qui est absurde , donc n est pair . Si $\varepsilon=-1$ alors 1 serait une racine (question 3°) ,ce qui est absurde
Posons $m=2n$, $R(X)=a_{2n}X^{2n}+...+a_0$ avec $a_0=a_{2n}\neq 0$. On a $R \in \mathcal{P}$, donc $a_{2n-k}=a_k$, donc R peut s'écrire
$R=a_0X^{2n}+a_1X^{2n-1}+...a_{n-1}X^{n+1}+a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+....+a_0X+a_0$, donc
$R(X)=X^n\left[a_0\left(X^n+\dfrac{1}{X^n}\right)+a_1\left(X^{n-1}\qquad+\dfrac{1}{X^{n-1}}\right)+...+a_n\right]=X^n\left[a_0P_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)+...+a_0\right]$
Posons $P(X)=a_0P_n(X)+a_1P_{n-1}(X)+...+a_n$, alors $R(X)=X^nP\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$.
On a $R(0)=a_0\neq 0$, donc :
Ainsi $P(x)=0$ si et seulement si $P\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$
On n'a pas unicité puisque λP vérifie aussi l'équivalence .
Si $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme qui ne s'annule pas AP vérifie aussi (exemple $A(X)=X^2+1$) , donc il n'y pas d'unicité du degré .

B. Un problème de dénombrement .

9. Si $(u_k)_{0\leq k\leq i} \in S_{i,j}$alors $0 \leq u_k \leq 0$ pour tout $k \in \{0,1,...,j\}$, donc $S_{i,j} \subset \{0,1,...,j\}^i$, comme $\{0,1,...,j\}^i$ est fini de cardinal $(j+1)^i$, donc $S_{i,j}$ est aussi fini . $S'_{i,,j}=S_{0,j}\cup S_{1,j}\cup...\cup S_{i,j}$ donc fini .
Si $(u_k)_{0\leq k\leq i+1} \in S_{i+1,j}$, alors $u_0=1$ et $u_0+u_1+...+u_{i+1}=j$, donc $u_0+u_1+...+u_i \leq j$ avec $u_0=1$

Ce qui donne que $(u_k)_{0\leq k\leq i} \in S'_{i,j}$, donc $\phi : S_{i+1,j} \to S'_{i,j}$, $u = (u_k)_{0\leq k\leq i+1} \mapsto u_{/\{0,1,...,i\}}$ est bien définie .

ϕ est évident injective .

Soit $v = (v_0, v_1, ..., v_i) \in S'_{i,j}$, Posons $u_k = v_k$ pour $0 \leq k \leq i$ et $u_{i+1} = j - (v_0 + v_1 + ... + v_j)$, on a $v_0 + v_1 + ... + v_j \leq j$, donc $u_{i+1} \in \mathbb{N}$, de plus $u_0 + ... + u_{i+1} = 1$ et $u_0 = v_0 = 1$, donc $(u_k)_{0\leq k\leq i+1} \in S_{i,j}$ et $\phi(u) = v$

Donc ϕ est surjective .

10. On a $S'_{i,j+1} = \{u = (u_0, u_1, ..., u_i) \,/\, u_0 = 1 \text{ et } u_0 + u_1 + ... + u_i \leq j+1\}$, notons T_1 et T_2les ensembles :

    $T_1 = \left\{u = (u_k) \in S'_{i,j+1} /\ \ u_0 + u_1 + ... + u_i = j+1\right\}$ et $T_2 = \left\{u = (u_k) \in S'_{i,j+1} /\ u_0 = 1 \text{ et } u_0 + u_1 + ... + u\right.$

    $\{T_1, T_2\}$ est une partition de $S'_{i,j+1}$, $Card\,(T_1) = s_{i,j+1}$ et $Card\,(T_2) = s'_{i,j}$ donc $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$.

    On a $s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,,j}$, D'autre part , d'après la question précedente ,ϕ est bijective , donc $s'_{i,j} = s_{i+1,j}$

    ce qui donne que $s_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1}$, donc : $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

11. On va faire récurrence sur $i + j = p$.

    Pour $p = 0$ et $p = 1$ c'est immédiat à vérifier . Supposons que pour tout (i, j) tel que $i + j = p$

    Soit (i, j) tel que $i + j = p + 1$, on a $s'_{i,j} = s'_{i-1,j} + s'_{i,j-1} = \binom{i+j-2}{i-1} + \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-1}{i}$.

    $s_{i,j} = s'_{i,j} - s'_{i,j-1} = \binom{i+j-1}{i} - \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-2}{i-1}$

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices .

12. Si A est inversible , alors $A^{-1}(AB)A = BA$, AB et BA sont semblables , donc $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

13. Si A n'est pas inversible , notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) complexes de A , supposons que $|\lambda_1| < |\lambda_2| < ... < |\lambda_p|$, $0 \in Sp\,(A)$, donc $\lambda_1 = 0$. Pour k assez grand , on a $0 < \dfrac{1}{k} < |\lambda_2|$,

    donc $\dfrac{1}{k} \notin Sp\,(A)$,ainsi $A_k = A - \dfrac{1}{k} I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et d'après ce qui précède , on a .

    Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A_k B - \lambda I_n) = \det(BA_k - \lambda I_n)$, par continuité de $A \mapsto \det(A)$, on a :

    $$\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

    Donc $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

D. Etude spéctrale de certaines matrices .

14. On a $s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = s_{j,i}$ donc la matrice S est symétrique réelle , donc diagonalisable .

    • Pour $n = 0$, $S = (1)$,

    • Pour $n = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1$, $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & \sqrt{5}-1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{3}{2}$.

    •Pour $n = 2$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, à l'aide de maple , on a :$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1+\sqrt{15} & \sqrt{15}-1 \\ 1 & 5+\sqrt{15} & \sqrt{15}-5 \end{pmatrix}$

    $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{15} \end{pmatrix}$, $\Phi_S = -(X^3 - 9X^2 + 9X - 1)$

15. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue et $P(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable ainsi ψ est bien définie , les autres propriètés sont immédiates à vérifier .

16. C'est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$,degrés echelonnées donc libre et puisque son cardinal est égal à $n+1$

    Donc c'est une base .

    A l'aide d'une intégration par parties , on a : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!$, donc $\psi(B_i, B_j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} = \binom{i+j}{i} = s_{i+1,j+1}$.

    Donc $mat_{\mathcal{B}}(\psi) = (s_{i+1,j+1})_{0\leq i,j\leq n} = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ S et comme ψ est définie positive , donc S est aussi définie positive .

    Le rang de S et de S' sont égaux à est égale à $n+1$.

17. D'après la formule de Leibniz , $f_i^{(j)}(t)$ est de la forme $Q_j(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^k}\right)$.

    On a $f_i^{(i)}(t) = \sum_{p=0}^{i} C_i^p (t^i)^{(p)} (e^{-t})^{(i-p)} = \left(\sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^{i-p} i! C_i^p}{(i-p)!} t^{i-p}\right) e^{-t} = (-1)^i \left(\sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^p i! C_i^p}{(i-p)!} t^{i-p}\right) e^{-t}$

    Donc $(-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t = \sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^p C_i^p}{(p-i)!} t^{i-p} = \sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^{i-p} C_i^{i-p}}{p!} t^p = \sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^{i-p} C_i^p}{p!} t^p = L_i(t)$.

18. Pour $j < i$, on a : $\psi(L_i, L_j) = \int_0^{+\infty} L_i(t) L_j(t) e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} L_i(t) L_j(t) e^{-t}dt = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t)$

    A l'aide d'une intégration par parties , on a $\int_0^X f_i^{(i)}(t) L_j(t)\,dt = \left[f_i^{(i-1)}(t) L_j(t)\right]_0^X - \int_0^X f_i^{(i-1)}(t) L_j'(t)\,dt$

    D'autre part au voisinage de 0, on a $f_i(t) = o(t^{i-1})$, donc d'après Taylor-young , on a $f_i^{(p)}(0) = 0$, pour $p \leq i-1$

    Et on a en $+\infty$, $f_i^{(i-1)}(t) = o(t^{-j})$, donc $L_j(t) f_i^{(i-1)}(t) \to 0$ en $+\infty$, par suite :

    $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} f_i^{(i-1)}(t) L_j'(t)\,dt$, puis des intégrations par parties successives , on a :

    $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t)\,dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} f_i^{(i-k)}(t) L_j^{(k)}(t)\,dt$, en particulier pour $k = j$, $L_j^{(j)}$ est constant , donc

    $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t)\,dt = (-1)^j C_i \int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t)\,dt = \left[f_i^{(i-j+1)}(t)\right]_0^{+\infty} = 0$.

    Pour $i = j$, le même travail donne $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t)\,dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t) L_i^{(i)}(t)\,dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t) L_i^{(i)}(t)\,dt$

    D'autre part ,on a $L_i(t) = \frac{t^i}{i!} + ...$, donc $L_i^{(i)}(t) = 1$, ce qui donne que :

    $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t)\,dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t)\,dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} t^i e^{-t}dt = i!$, donc

    $\psi(L_i, L_j) = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t)\,dt = 1.$

19. Pour $P = X^k$, on a $\tau(P)(X) = (X-1)^k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} C_k^p X^k$

On a $\tau^{-1}(P)(X) = P(X+1) = \sum_{p=0}^{k} C_k^p X^k$

Donc $U = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & & C_n^1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} C_0^0 & (-1)^1 C_1^0 & (-1)^2 C_2^0 & \cdots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & (-1)^0 C_1^1 & (-1)^1 C_2^1 & & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ 0 & 0 & (-1)^0 C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (-1)^1 C_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^0 C_n^n \end{pmatrix}$

On a $L_i(t) = \sum_{p=0}^{i} \frac{(-1)^{i-p} C_i^p}{p!} t^p = \sum_{p=0}^{i} (-1)^{i-p} C_i^p B_p(t)$, donc la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{L}$ est égal à T .

On a $T = P_{\mathcal{B},\mathcal{L}}$, donc $U = T^{-1}$.

$S = mat_{\mathcal{B}}(\psi)$ et $\mathcal{L}$ étant orthonormée , donc $mat_{\mathcal{L}}(\psi) = I_n$, ce qui donne que ${}^tTST = I_n$

Donc $S = {}^tT^{-1}T^{-1} = {}^tU\, U$.

On a $\det(S) = (\det(U))^2 = 1$ et aussi $\det S' = 1$

20. $\tau : P(X) \mapsto P(X+1)$ et notons $d : P(X) \mapsto P(-X)$, la matrice d dans la base canonique est D ,

donc $(\tau d)(P(X)) = P(-1-X)$, donc $(d\tau)^2 (P(X)) = P(X)$, donc $(UD)^2 = id$, ce qui s'écrit matriciellement

$(DU)^2 = I_{n+1}$, donc $DUDU = I_{n+1}$ par suite $U^{-1} = DUD$.

D'autre part $S^{-1} = U^{-1}\ ({}^tU)^{-1} = (DUD)\,{}^t(DUD) = DU(D\,{}^tD)UD = DU\,{}^tUD = D(U\,{}^tU\ )D^{-1}$ ($D^{-1} = D = {}^tD$)

Donc S^{-1} est semblable à ${}^tUU$.

21. S^{-1} et $U\,{}^tU$ sont semblables , donc ont le même polynôme caractéristiques

$\det(U\,{}^tU - XI_{n+1}) = \det(S^{-1} - XI_{n+1}) = (-X)^{n+1} \det\left(I_{n+1} - \frac{1}{X}S^{-1}\right) = (-X)^{n+1}\det(S^{-1})\det\left(S - \right.$

$$=(-X)^{n+1}\det(S^{-1})\,\Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) = (-X)^{n+1}\,\Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) \text{ (puisque } \det(S^{-1}) = 1) .$$

Or $\det(U\,{}^tU - XI_{n+1}) = \det({}^tU\,U - XI_{n+1}) = \det(S - XI_{n+1}) = \Phi_S(X)$ donc

$$(-X)^{n+1}\,\Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) = \Phi_S(X)$$

Ainsi Φ_S un polynôme réciproque

Si n est pair $\Phi_S \in \mathcal{D}$, sinon $\Phi_S \in \mathcal{P}$.