DS n°01

Corrigé.

Exercice 1 : suites et calcul matriciel

Partie I : préliminaires

Dans tout le problème, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

   Après calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ -7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans toute la suite on considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \quad\quad\ v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

   Le système (la relation de récurrence) qui définit les suites peut sécrire $\forall n \in \mathbb{N},\ AX_n = X_{n+1}$. On montre alors le résultat demandé sans difficulté par récurrence :

   Initialisation : Par définition on a $A^0 = I_3$ et donc $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.

   La propriété est bien vérifiée au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $X_n = A^n X_0$. On a alors, d'après la reformulation du système vue précédemment, $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

   La propriété est donc bien héréditaire.

   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire en particulier u_3, v_3, w_3.

   On a en particulier $\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = X_3 = A^3 X_0 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ -7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et comme multiplier une matrice par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ consiste à sélectionner la première colonne de cette matrice, on concut : $\begin{cases} u_3 = 4 \\ v_3 = -4 \\ w_3 = -7 \end{cases}$.

   Autre méthode possible : on les calcule de proche en proche à l'aide du système (la relation de récurrence) qui définit les suites.

Partie II : trigonalisation de A

On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$, que l'on identifie à des matrices à trois lignes et une colonne :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   C'est une famille formée de $3 = \dim(R^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc pour montrer que c'est une base de montrer sa liberté, ce qu'on fait ci-dessous.

   Considérons une combinaison linéaire nulle des trois vecteurs : $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Celle-ci peut se réécrire $\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$.
   La première ligne donne directement $\beta = 0$.
   En réinjectant ceci dans la deuxième ligne on obtient directement $\alpha = 0$.
   Puis en réinjectant ceci dans la deuxième ligne on obtient directement $\gamma = 0$.
   Finalement on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui signifie que notre combinaison linéaire nulle est nécessairement triviale. D'où la liberté de la famille, ce qui implique comme on l'a vu que c'est une base.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme

$$f; \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Par définition, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $T = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} & |_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.

   Calculons : • $f(b_1) = A \times b_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2b_1$ et donc $\begin{matrix} | \\ f(b_1) \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   • $f(b_2) = A \times b_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_2$ et donc $\begin{matrix} | \\ f(b_2) \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   • $f(b_3) = A \times b_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_2 + b_3$ et donc $\begin{matrix} | \\ f(b_3) \\ |_{\mathcal{B}} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note P la matrice de l'identité de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les décompositions des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Calculer P^{-1}.

   Tous calculs faits (par exemple avec l'algorithme du Pivot de Gauss) : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Finalement, donner une relation entre A, P, T et P^{-1}.

D'après le cours on a $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}(\text{id})\mathcal{M}at_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}at_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}(\text{id}) = PTP^{-1}$.

Partie III : Calcul des puissances

On note $T = N + D$ où D est une matrice diagonale et où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

On a $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien diagonale.
Et donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *i. e.* $DN = N = ND$ et en particulier N et D commutent.

9. Que vaut N^n pour un entier $n \geqslant 2$? Aucune justification n'est demandée.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $N^n = (0)$. On pourrait le montrer facilement par récurrence.

10. En déduire l'expression de T^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera ses neufs coefficients en fonction de n.

Comme N et D commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
T^n &= (N + D)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \text{ puisqu'on a } N^k = (0) \text{ pour } k \geqslant 2 \\
&= \tbinom{n}{0} N^0 D^n + \tbinom{n}{1} N^1 D^{n-1} \\
&= D^n + nND^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut aussi procéder par récurrence sans utiliser le binôme.

11. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. On pourra utiliser la question 7.

On a $A^n = \left(PTP^{-1}\right)^n = PTP^{-1}PTP^{-1}PTP^{-1}P \cdots P^{-1}PTP^{-1} = PT^nP^{-1}$ après télescopage.

12. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n. On pourra utiliser la question 2.

On a vu qu'on a $X_n = A^n X_0$, *i. e.* $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Autrement dit $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de $A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n & n \\ n - 2^n + 1 & 2^n - n & n \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$ (il n'est d'ailleurs pas utile d'effectuer tout le calcul de PT^nP^{-1} pour déterminer sa première colonne).

En conclusion on a $\begin{cases} u_n = n + 1 \\ v_n = n - 2^n + 1 \\ w_n = 1 - 2^n \end{cases}$.

Exercice 2 : endomorphismes cycliques

Pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}$, un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique lorsqu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Partie I : un exemple

Dans cette partie on considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} \end{cases}$.

13. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- L'application f est définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans le même espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
- Reste à montrer que f est linéaire. Pour cela les deux méthodes les plus simples ici sont :
  - La définition.
    Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') \\ (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \lambda 4(x - 2y) + \mu(4x' - 2y') \\ \lambda(x + y) + \mu(x' + y') \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4x' - 2y' \\ x' + y' \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. D'où la linéarité.
  - La propriété fondamentale.
    L'application f est la forme $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$ avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, elle est donc linéaire.

14. En considérant le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, montrer que l'endomorphisme f est cyclique.

Notons $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule : $f(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs v et $f(v)$ sont non colinéaires donc la famille $(v, f(v))$ est libre. C'est une famille de deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, donc c'en est une base. Ceci montre que f est cyclique.

15. Existe-t-il un vecteur $w \in E$ non nul tel que $(w, f(w))$ ne soit pas une base de E ?

Comme toute famille formée de deux vecteurs non colinéaire forme une base, la question est de savoir s'il existe un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^2$ tel que w et $f(w)$ soient coliéaires. On cherche donc $w = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ tel que $f\binom{x}{y} \mathbin{/\!/} \binom{x}{y}$, autrement dit tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequel $f\binom{x}{y} = \lambda\binom{x}{y}$ *i. e.*

$$\begin{cases} 4x - 2y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \qquad i.\ e. \qquad \begin{cases} (4-\lambda)x - 2y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène : clairement $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ est une solution mais nous cherchons ici des solutions non nulles, il faudrait donc que le système n'ait pas une unique solution, donc que son déterminant soit nul. Il vaut $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Il est donc nécessaire de prendre $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$. Prenons par exemple $\lambda = 3$, on trouve que l'ensemble des solutions du système est $\mathrm{Vect}\binom{1}{1}$. Ouf ! On prend $w = \binom{1}{1}$, on trouve $f(w) = 2w$ et $(w, f(w))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : si par contemplation on trouve tout seul un vecteur w tel que $f(w) \mathbin{/\!/} w$, comme par exemple $w = \binom{1}{1}$ ou $w = \binom{2}{1}$, c'est imparable (mais il faut tout de même calculer $f(w)$ pour établir la colinéarité).

Partie II : un contre-exemple

Dans cette partie on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $f_M : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$ canoniquement associé à M (il n'est pas demandé de montrer que f_M est un endomorphisme).

16. Montrer qu'on a $f_M^2 = f_M + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

On calcule : $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 - M = 2I_3$ et donc $f_M^2 - f_M = 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ce qui donne le résultat demandé.

17. Montrer que la matrice M est inversible et déterminer son inverse.

On repart de $M^2 - M = 2I_3$. On a donc $M\frac{M-I_3}{2} = I_3$ donc $\frac{M-I_3}{2}$ est un inverse à droite de M, et comme M est une matrice carrée, c'est son inverse tout court : M est inversible et $M^{-1} = \frac{M-I_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. Justifier que l'endomorphisme f_M n'est pas cyclique.

Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ on a $f_M^2(v) = f_M(v) + 2v$ ce qui montre que la famille $(v, f_M(v), f_M^2(v))$ est toujours liée, ce ne peut donc jamais être une base de $\mathbb{R}^3$.

Partie III : un autre exemple

Dans cette partie on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

19. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

 • Linéarité : soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

 $$\begin{array}{rcl} \text{On a : } \Delta(\lambda P(X) + \mu Q(X)) & = & \big(\lambda P + \mu Q\big)(X+1) - \big(\lambda P + \mu Q\big)(X) \\ & = & \Big(\lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)\Big) - \Big(\lambda P(X) + \mu Q(X)\Big) \\ & = & \lambda\Big(P(X+1) - P(X)\Big) \\ & = & \lambda\Delta(P(X)) + \mu\Delta(Q(X)) \end{array}.$$

 • Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $P(X+1)$ est de même degré que $P(X)$ donc $\Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X)$ est la différence de deux polynômes de degré $\leqslant n$, c'est donc aussi un polynôme de degré $\leqslant n$ puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel (on va voir plus bas qu'il est même de degré $\leqslant n-1$, mais pour voir que c'est un endomorphisme ce qu'on doit montrer c'est que son degré est $\leqslant n$).

20. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Exprimer $\Delta(X^k)$ sous forme développée.

 $$\begin{array}{rcll} \text{On a : } \Delta(X^k) & = & (X+1)^k - X^k & \text{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \; - \; X^k & \text{(binôme de Newton)} \\ & = & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i & \text{(Chasles)} \end{array}.$$

21. Justifier que si $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P(X))) = \deg(P(X)) - 1$.

 Notons $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Par linéarité $\Delta(P(X)) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k)$. C'est une somme des polynômes de degré $< d-1$ à l'expection de $\Delta(X^d)$ qui est de degré $d-1$. Donc $\Delta(P(X))$ est de degré $d-1$.

22. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

 La famille $(\Delta^n(X^n), \Delta^{n-1}(X^n), \dots, \Delta(X^n), X^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degrés donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc aussi le cas de $(X^n, \Delta(X^n), \dots, \Delta^{n-1}(X^n), \Delta^n(X^n))$ qui comprend les mêmes vecteurs. Donc Δ est bien un endomorphisme cyclique.

Exercice 3 : des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle que, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i, colonne j qui vaut 1.

Partie I : un exemple

Dans cette partie seulement, on suppose $n = 2$. On note $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

23. Justifier que P est inversible et donner P^{-1}.

La matrice a pour déterminant $ad - bc = 2 \times (-4) - (-3) \times 3 = 1 \neq 0$, elle est donc inversible d'inverse $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut aussi utiliser les opérations élémentaires :

$$(P \,|\, I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_2 - L_1}{\widetilde{L}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow 3L_1 - L2}{\widetilde{L}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L2}{\widetilde{L}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) = (I_2 \,|\, P^{-1})$$

Dans la suite de cette partie, on note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$.

24. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, justifier qu'on a $\varphi(M) = M$ si et seulement si M et P commutent.

En effet, on a : $\varphi(M) = M \iff P^{-1}MP = M \iff MP = PM$.

25. En déduire les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(M) = M$.

D'après la question précédente, $\varphi(M) = M$ si et seulement si $MP - PM = 0$ ce qui se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 2a + 3b & -3a - 4b \\ 2c + 3d & -3c - 4d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a - 3c & 2b - 3d \\ 3a - 4c & 3b - 4d \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} b + c & -a - 2b + d \\ -a + 2c + d & -c - b \end{pmatrix} = 0$$

En regardant le coefficient en position $(1, 1)$, on trouve $b = -c$. Les quatres équations se ramènent donc à deux :

$$\left\{ \begin{array}{l} b + c = 0 \\ -a + 2c + d = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de $\varphi(M) = M$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 2c + d & -c \\ c & d \end{pmatrix},\ (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Partie II : automorphismes intérieurs

Dans cette partie $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$

26. Justifier que φ est une application linéaire.

Soient λ, μ dans $\mathbb{R}$ et M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\varphi(\lambda.M + \mu.N) = P^{-1}(\lambda.M + \mu.N)P = \lambda.P^{-1}MP + \mu.P^{-1}NP = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N).$$

L'application φ est bien une application linéaire.

27. Justifier que φ est un automorphisme.

L'application linéaire φ est clairement un endomorphisme puisque les espaces de départ et d'arrivée sont identiques. Il suffit donc de montrer que φ est bijective.

• Une façon de faire : un endomorphisme en dimension finie est bijectif si et seulement il est injectif d'après le théorème du rang. Il reste donc à montrer que $Ker(\varphi) = \{0\}$.
Or on a $M \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow P^{-1}MP = 0 \Leftrightarrow M = (0)$. Ainsi φ est bien un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Autre méthode possible : une application est bijective si et seulement si elle a une application réciproque. Ici, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est la réciproque de φ par associativité du produit matriciel. Donc φ est bien bijective et c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

28. Justifier qu'on a : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $\varphi(MN) = P^{-1}MNP = P^{-1}MI_nNP = P^{-1}MPP^{-1}NP = \varphi(M)\varphi(N)$.

Partie III : automorphismes d'anneau

Cette partie établit une réciproque au résultat vu dans la partie précédente. On suppose maintenant que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N)$.

On rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i colonne j qui vaut 1.

29. Soient $i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}$. Rappeler sans démonstration la valeur de $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

$$E_{i,j}E_{k,l} \;=\; \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & j \neq k \\ E_{i,l} & \text{si} & j = k \end{array} \right.$$

Dans toute la suite, on note $U_{i,j} = \varphi(E_{i,j})$ et $u_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $U_{i,j}$, c'est-à-dire $u_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & U_{i,j}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

30. Soient $i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}$. Déduire de la question 29 qu'on a $u_{i,j} \circ u_{k,l} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } j \neq k \\ u_{i,l} \text{ si } j = k \end{array} \right.$.

$$\text{On a } : U_{i,j} \times U_{k,l} \;=\; \varphi(E_{i,j})\varphi(E_{k,l}) \;=\; \varphi(E_{i,j}E_{k,l}) \;=\; \left\{ \begin{array}{lll} \varphi(0) = 0 & \text{si} & j \neq k \\ \varphi(E_{i,l}) = U_{i,l} & \text{si} & j = k \end{array} \right.$$

Ce qui se traduit sur les applications linéaires canoniquement associées par :

$$u_{i,j} \circ u_{k,l} \;=\; \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & j \neq k \\ u_{i,l} & \text{si} & j = k \end{array} \right.$$

31. Justifier qu'il existe un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_{1,1}(x) \neq 0$.

    L'automorphisme φ est injectif. Ainsi, $E_{i,1}$ étant non nul, il en est de même pour $U_{i,1}$ et donc pour l'application linéaire $u_{i,1}$. Il existe donc x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $u_{i,j}(x) \neq 0$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $v_i = u_{i,1}(x)$.

32. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

    Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}$ est libre avec la définition. Soient λ_1, ..., λ_n dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lambda_1 v_1 \;+\; \lambda_2 v_2 \;+\; \ldots \;+\; \lambda_n v_n \;=\; 0$$

    Soit i quelconque dans $[\![1, n]\!]$. On applique $u_{1,i}$ à l'équation précédent. En remplaçant les v_i par leurs valeurs, on obtient :

$$\lambda_1 u_{1,i} \circ u_{1,1}(x) \;+\; \lambda_2 u_{1,i} \circ u_{2,1}(x) \;+\; \ldots \;+\; \lambda_n u_{1,i} \circ u_{n,1}(x) \;=\; 0$$

    On utilise ensuite la relation trouvée dans la question précédente. Ainsi :

$$\lambda_i u_{1,1}(x) \;=\; 0$$

    Comme $u_{1,1}(x) \neq 0$, on a $\lambda_i = 0$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$. La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est donc libre. De plus elle présente autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

33. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer la matrice de $u_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.

    Soit k dans $[\![1, n]\!]$. Puisque :

$$u_{i,j}(v_k) \;=\; u_{i,j} \circ u_{k,1}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ u_{i,1}(x) = v_i & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

    La matrice de $u_{i,j}$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc $E_{i,j}$.

34. En déduire qu'il existe une matrice inversible P vérifiant $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\; \varphi(E_{i,j}) = P^{-1} E_{i,j} P$.

    Comme $U_{i,j}$ et $E_{i,j}$ sont les matrices de $u_{i,j}$ respectivement dans la base canonique et la base $\mathcal{B}$, d'après la formule de changement de base, il existe une matrice inversible P telle que :

$$\varphi(E_{i,j}) \;=\; U_{i,j} \;=\; P^{-1} E_{i,j} P$$

    où plus précisément P est une matrice de passage : la matrice de l'identité de la base canonique (au départ) à la base $\mathcal{B}$ (à l'arrivée). Elle ne dépend donc pas de i et j.

35. Pour cette matrice P, montrer finalement qu'on a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\; \varphi(M) = P^{-1} M P$.

    Notons $(m_{i,j})$ les coefficients de M. On a, par linéarité :

$$\varphi(M) \;=\; \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} E_{i,j}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \varphi\left(E_{i,j}\right) \;=\; P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} E_{i,j}\right) P \;=\; P^{-1} M P$$

Fin de l'épreuve