Fev. 2023 | **Devoir surveillé 8** | Calculatrice interdite

# Devoir surveillé 8

**Séries entières - intégrales dépendant d'un paramètre**

## Exercice 1

**1)** (a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t\,s}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

(b) Montrer que $f$ est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

(c) Montrer que $f$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement

**2)** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Montrer que $S$ est développable en série entière et donner son développement.

(b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$

**3)** On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $\quad xy'' + y' - (x+1)y = 1$.

On suppose qu'il existe une solution $\theta$ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in ]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(a) Déterminer alors une relation entre $a_1$ et $a_0$, ainsi qu'une relation entre $a_{n+2}, a_{n+1}$ et $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}$.
En déduire qu'une telle solution $\theta$ existe et que de plus $r = +\infty$.

## Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

## Partie I - Préliminaires

**Q1.** Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

**Q2.** En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale $I$ est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale $I$ converge.

**Q3.** Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

## Partie II - Calcul de $F$ sur $]0, +\infty[$

**Q4.** Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de $F$ en $+\infty$.

**Q5.** Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

**Q6.** En déduire que la fonction $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

## Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

**Q7.** Montrer que la fonction $F_1$ est continue sur $[0,1]$.

**Q8.** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

**Q9.** Montrer que la fonction $F_2$ est continue sur $[0,1]$.

**Q10.** En déduire que la fonction $F$ est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale $I$.