2022-2023 **Devoir surveillé 7** PSI

Devoir surveillé 7

Séries de fonctions - Endomorphismes d'un eve - 4h

Exercice 1

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le rayon spectral par :

$$\rho(M) = Max\left\{ |\lambda| \in \mathbb{R} \ / \ \lambda \in Sp(M) \right\}$$

On considère à présent que A est une matrice symétrique réelle.

1. Montrer que :
$$\rho(A) \quad = \quad \underset{X \in \mathbb{R}^n}{Max} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$
2. Montrer que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$. Est-ce une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Soient A et B des matrices symétriques de taille $n \times n$ qui commutent. Montrer que $A.B \in S_n(\mathbb{R})$ puis que :
$$\rho(AB) \ \leq \ \rho(A).\rho(B)$$
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$

Exercice 2

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Dans tout le problème n est un entier de $\mathbb{N}^*$. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. Dans l'ensemble des matrices à coefficients réels, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec une matrice de passage orthogonale.

On note $\text{diag}(\alpha_1,...,\alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice A et $\text{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.

Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $\left(x|y\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur *x*. Soient *X* et *Y* les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de *x* et *y* dans $\mathcal{B}$, le produit ${}^tXY$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $\left(x|y\right)$. On écrira $\left(x|y\right)={}^tXY$ qui est le produit scalaire canonique des matrices *X* et *Y* de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

<u>Objectifs</u>

Dans le problème, on définit les ensembles S_n^+ (respectivement S_n^{++}) des matrices symétriques positives (respectivement des matrices symétriques définies positives) ainsi que les endomorphismes autoadjoints associés et on en donne quelques propriétés.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les *n* valeurs propres réelles de *S* comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de *S* avec : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $SX_i=\lambda_i X_i$.

II.1. On veut montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda_i \geq 0$.

II.1.2. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $\lambda_i \geq 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

II.1.3. On suppose que $S \in S_n^{++}$ et donc que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$. Montrer que *S* est inversible et que son inverse $S^{-1} \in S_n^{++}$.

II.2. On suppose de plus que $S \in S_n^+$.

II.2.1. Soient $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ et $\Delta=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n}\right)$, calculer Δ^2.

On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2=D$. On note $(C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où C_i est la matrice colonne dont le coefficient de la ligne *i* est égal à 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Soient $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}$ avec $\mu \geq 0$ tels que $NY=\mu Y$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\mu^2 y_i=\lambda_i y_i$ puis $\mu y_i=\sqrt{\lambda_i}\, y_i$. En déduire que $N=\Delta$.

II.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UD{}^tU$. Déterminer une matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$. Montrer que T est unique.

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice T de S_n^+ telle que $T^2 = S$.

II.3. Une détermination de $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \ldots, \mu_p$ par :

$$\text{pour tout } k \in [\![1, p]\!] \text{ et tout } a \in \mathbb{R}\,,\ L_k(a) = \prod_{j=1}^{p} \frac{(a-\mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)}\ .$$

II.3.1. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, calculer $L_k(S)X_i$ en distinguant les cas $\mu_k = \lambda_i$ et $\mu_k \neq \lambda_i$ (on rappelle que les X_i définis au début de la partie II, appartiennent à une base orthonormale de vecteurs propres de S avec : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $SX_i = \lambda_i X_i$).

II.3.2. Soit P le polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$, à coefficients réels tel que : pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$. Exprimer P comme une combinaison linéaire des polynômes L_k . Calculer $P(S)X_i$ et en déduire que $P(S) \in S_n^+$. Montrer que $P(S) = \sqrt{S}$.

II.3.3. En application des questions précédentes, on prend $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $S \in S_3^+$. Exprimer $\sqrt{S}$ comme une combinaison linéaire des matrices S et $I_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$.

Problème

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} \;=\; 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \ \ldots\ .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction* S_1

a) Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.
c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*
a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$.
b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.
c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*
a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]\,0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).
b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.
c) A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que $\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = 1$.
d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0?

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall\, x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^2} = 1 + e^{-x} + e^{-4\,x} + e^{-9\,x} + e^{-16\,x} + \ \dots\ .$$

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*
a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x\,(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\, \mathrm{d}t \leq e^{-x\,n^2}.$$

b) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

c) Retrouver alors $\lim_{x \to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*
a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$ pour $x > 0$*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \;\leq\; \int_N^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \;\leq\; \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\,N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \;\leq\; \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\int_0^1 e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ convergent-elles?

En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n.

[...]