PSI - Jan. 2023

Devoir surveillé n^{o}6

Calculatrices interdites

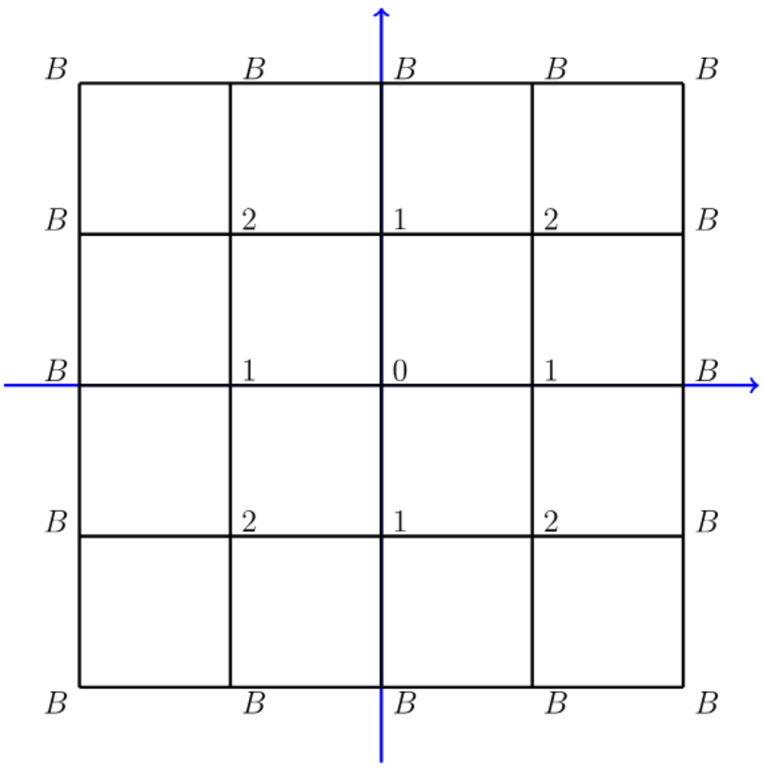
Probabilité - Séries de fonctions

Exercice 1

On consière la grille représentée ci-dessous, construite dans le carré $C = [-2,2] \times [-2,2]$ avec :

- ✏ les 5 segments horizontaux définis par : $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $y = k$ avec $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$.
- ✏ les 5 segments verticaux définis par : $x = k$ avec $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$ et $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

Ces 10 segments définissent 25 points d'intersection de coordonnées (i,j) avec $i,j \in \{0,\pm 1,\pm 2\}$. On convient d'autre part d'appeler *arête* tout segment horizontal ou vertical de longueur 1 qui joint horizontalement ou verticalement deux de ces 25 points et on note ces 25 points comme ci-dessous : 0 désigne l'origine, 1 les points situés à une arête de 0, 2 les points situés à 2 arêtes de 0 et n'appartenant pas au bord du carré C, et B les points du bord du carré $C = [-2,2] \times [-2,2]$.



On considère au cours du temps indexé par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n le déplacement d'un individu sur ces 25 points (i,j) où $i,j \in \{0,\pm 1,\pm 2\}$ de la grille ci-dessus.
Les déplacements de l'individu sur les 25 points de cette grille se font selon les 3 règles suivantes :

- **i)** à l'instant 0, l'individu est placé au point central de la grille, en $O(0,0)$.
- **ii)** à l'instant n, si l'individu est en un point M de la grille n'appartenant pas au bord de ce carré C, il se déplace horizontalement ou verticalement d'une arête sur la grille à partir de ce point M, de façon à se trouver à l'instant $n+1$ et de façon équiprobable en l'un des 4 points M' de la grille distants d'une arête du point M.
- **iii)** à tout instant n, si l'individu arrive en un point situé au bord de ce carré $C = [-2,2] \times [-2,2]$, c'est-à-dire s'il arrive en un point (i,j) avec $i = \pm 2$ ou $j = \pm 2$, il y reste définitivement.

1. *Etude d'une suite de variables aléatoires* (X_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire indiquant la position 0, 1,2 ou B de l'individu à l'instant n. Il s'agit donc d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, B\}$.

1.1. Expliquer briévement pourquoi on a : $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = B) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = B) = \dfrac{1}{2}$.

1.2. Expliciter de même les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)$.

1.3. Exprimer chacun des 4 réels $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = B)$ en fonction des réels $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$ et $\mathbb{P}(X_n = B)$.

1.4. Préciser une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que l'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \end{pmatrix}$$

2. *Diagonalisation de la matrice* M

2.1. Un logiciel de calcul formel montre que les valeurs propres λ de M sont $1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et 0.

On demande de déterminer les quatre becteurs propres suivants de M :

- ✏ le vecteur U_1 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 1$ dont la dernière composante est égale à 1.
- ✏ le vecteur U_2 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 + 4\sqrt{2}$ et 1.
- ✏ le vecteur U_3 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dont les 2 dernières composantes sont $-6 - 4\sqrt{2}$ et 1.
- ✏ le vecteur U_4 de $\mathbb{R}^4$ associé à $\lambda = 0$ dont la dernière composante est égale à 1.

2.2. On note P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes, dans cet ordre, sont U_1, U_2, U_3, U_4.

On note D la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Indiquer si M est diagonalisable, et expliciter une relation entre les matrices D, M, P, P^{-1}

3. *Lois des variables aléatoires* X_n

Pour tout entier naturel n, on désigne par V_n le vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont les composantes sont, de haut en bas, $\mathbb{P}(X_n = 0), \mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = B)$

3.1. Préciser le vecteur V_0 et démontrer, pour tout entier naturel n, qu'on a : $V_n = P\ D^n\ P^{-1}\ V_0$.

3.2. Soit X un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^4$ dont on note les composantes x_1, x_2, x_3, x_4.

Déterminer X tel que $PX = V_0$ (on vérifiera que $x_2 = -\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{4}$ et $x_3 = -\dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$).

3.3. En déduire $P^{-1}V_0$, puis $D^n P^{-1} V_0$, et enfin les composantes de V_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.4. Vérifier pour $n \geqslant 1$ que $\mathbb{P}(X_{2n} = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 2) = 0$ et préciser $\mathbb{P}(X_{2n-1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{2n} = 2)$.

Vérifier également qu'on a pour $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = B) = 1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Exercice 2

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k}$$

$\boxed{\text{Partie I. Autre expression de } f \text{ sur }]-1;1[.}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que f est définie et continue sur $I =]-1;1[$

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que f est dérivable sur I. Que vaut f' ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que pour tout x de $]-1,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - x}{|1 - xe^{ix}|^2}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour tout x de $[-1,1]$, posons :

$$g(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$$

Montrer que g est dérivable, puis calculer et simplifier g'.

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire que $f = g$ sur $]-1;1[$.

$\boxed{\text{Partie II. Limites de } f \text{ en } -1 \text{ et } 1.}$

$\boxed{\text{Q6}}$ Soient x dans $]-1;1[$ et k dans $\mathbb{N}$. On pose $A_k(x) = \sum_{j=0}^{k} x^j \sin(jx)$. Vérifier que :

$$|A_k(x)| \leq \frac{2}{|1 - xe^{ix}|}$$

En déduire qu'il existe M indépendant de x et de n vérifiant $|A_k(x)| \leq M$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Vérifier que pour tout n, et N dans $\mathbb{N}$ tels que $N > n$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{x^k \sin(kx)}{k} = \frac{A_N(x)}{N} - \frac{A_n(x)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{N-1} A_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire que la série définissant f converge uniformément sur $]-1;1[$

$\boxed{\text{Q9}}$ Vérifier que pour tout y de $]-1;1[$: $\arccos(y) = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+y}\right)$ En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi - 1}{2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = \frac{1}{2}$$