2022-2023

# Devoir surveillé 5

PSI

**Séries numériques - espaces vectoriels euclidiens - 4h**

## Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, ..., P_n(X) = X^n)$ la base canonique de $E$. Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple $(P,Q)$ d'éléments de $E$, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

**1.** Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.

**2.** Soit $P$ un polynôme de $E$, calculer $(P|P_0)$.

**3.** Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X-a_k}{a_j-a_k}$.

  **3.1.** Démontrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

  **3.2.** Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\,|\,)$.

  **3.3.** En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $E$ et qu'elle est orthonormale.

  **3.4.** Déterminer les composantes d'un polynôme $P$ de $E$ dans la base $\mathscr{B}$.

  **3.5.** Déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j$.

**4.** Soit $H$ l'ensemble des polynômes $P$ de $E$ tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

  **4.1.** Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

  **4.2.** Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de $H$.

**5.** Soit $Q$ un polynôme de $E$.

  **5.1.** Déterminer le projeté orthogonal de $Q$ sur $H^\perp$.

  **5.2.** Déterminer la distance de $Q$ au sous-espace vectoriel $H$.

## Exercice 2

Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n\geq 0}$, on notera $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général $u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

## Partie 1 Exemples de calcul explicite du reste

1. Rappeler pourquoi, lorsque la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la suite de terme général $\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ est convergente. Quelle est alors sa limite ?

2. Dans cette question, $x$ désigne un nombre réel non nul, de signe quelconque.

   a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Quelle est sa somme ?

   b) Établir, pour tout nombre entier strictement positif $n$, l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!} \operatorname{sh}(t)\, \mathrm{d}t \quad .$$

   c) Donner une expression similaire de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!}$, sous la forme d'une intégrale.

3. a) Démontrer que la série de terme général $a_n = \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

   b) Trouver un couple $(P, Q)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\begin{cases} P(X) - Q(X) = 2X \\ P(X)\, Q(X) = X^4 + X^2 + 1 \end{cases} \quad .$$

   c) Établir que, pour tout couple $(x, y)$ de nombres réels positifs ou nuls , on a :

$$\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) = \arctan(x) - \arctan(y) \quad .$$

   d) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^2 - n + 1)\ .$$

   e) La série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)$ est-elle convergente ?

## Partie II Exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si, et seulement si, $x$ est strictement supérieur à 1.

5. Dans cette question on suppose que le réel $x$ est strictement supérieur à 1 et, pour tout entier $n$ strictement positif, on note $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^x}$.

   a) Pour tout réel $a$ strictement positif, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{1-x}\big(1+(x-1)\ln a\big)}{(x-1)^2}\,.$$

   b) Établir, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t \;\le\; r_n \;\le\; \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x}\,\mathrm{d}t\quad.$$

   c) En déduire que $r_n$ est équivalent à $\frac{\ln n}{(x-1)\,n^{x-1}}$ quand $n$ tend vers l'infini.

6. Sommation des relations de comparaison

   On considère deux suites $v = (v_n)_{n\geq 0}$ et $w = (w_n)_{n\geq 0}$ à termes réels non nuls.
   On suppose que $v_n$ est équivalent à $w_n$ quand $n$ tend vers l'infini et que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

   On rappelle que, si tous les termes de la suite $v$ sont positifs, alors :

   - la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente.
   - $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ est équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand $n$ tend vers l'infini .

   a) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que la première de ces deux propriétés de $w$ ne serait pas assurée si le signe des termes de la suite $v$ n'était pas constant.

   b) Montrer de même que, lorsque le signe des termes de la suite $v$ n'est pas constant, il est possible que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ soit convergente mais que $\sum_{k=n}^{\infty} w_k$ ne soit pas équivalent à $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$ quand $n$ tend vers l'infini. *On pourra utiliser pour $w$ la suite de terme général* $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n(n+1)}$ .

**Exercice 3**

On rappelle quelques informations sur l'intégrale de Wallis :

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

De plus, posons :

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - u_{n+1}$$

1. Montrer que $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$
2. En déduire que $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que $(u_n)$ est convergente.
4. Posons pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $w_n = e^{u_n}$. Montrer que

$$\frac{\sqrt{2}w_{2n}}{w_n^2} = \sqrt{n}\frac{2}{\pi}I_{2n}$$

5. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$