2022-2023 **Devoir surveillé 5 - Version difficile** PSI

Devoir surveillé 5 - Version difficile

Séries numériques - espaces vectoriels euclidiens - 4h

Exercice

Nous travaillerons dans cet exercice dans un espace de Hilbert $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ au lieu d'un préhilbertien réel, uniquement pour que le théorème de représentation de Riesz s'applique également aux formes linéaires continues. On pourra bien sûr utiliser ce résultat sans démonstration.

Notons $\|\_\|$ la norme euclidienne et E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On définit la convergence faible comme le type de convergence minimum pour garder la continuité des formes linaires continues et la convergence forte comme la convergence (classique) en norme. En d'autres termes, pour une suite (x_n) de E :

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Faible}} x & \iff \quad \forall l \in E',\ \ l(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l(x) \\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Forte}} x & \iff \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\_\|} x \end{cases}$$

Partie I. Résultats généraux.

1. Rappeler et montrer le théorème de représentation de Riesz dans un eve. On admet que ce théorème reste vrai pour les formes linéaires continues dans un espace de Hilbert.
2. En déduire que (x_n) converge faiblement vers x si et seulement si :

$$\forall a \in E,\ \ \underset{n\to+\infty}{lim} \langle x_n, a\rangle \ = \ \langle x, a\rangle$$

3. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.

Partie II. Le cas de la dimension finie. On suppose dans cette partie E de dimension finie.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E et x dans E. Donner et montrer une relation entre les (x/e_i) et $\|x\|$.
2. En déduire que les deux modes de convergence sont identiques.

Partie III. Un contre-exemple en dimension infinie.

1. Montrer l'existence d'une FON $(e_1, e_2, \ldots)$ infinie de E.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i\rangle^2$ est convergente pour tout x de E.
3. Montrer que (e_n) est une suite qui converge faiblement mais pas fortement. En déduire que ces deux modes de convergence coïncident uniquement en dimension finie.

Problème

Dans cette partie, on utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ u_k \neq \lim_{n\to\infty} u_n$$

- à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
  - lente si $\ell^c = 1$,
  - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0,1[$,
  - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}$.

I.A – Des résultats généraux

I.A.1) Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

I.A.2) L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

I.A.3) Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

I.A.4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

I.B – Exemples de calcul de vitesse de convergence

I.B.1) Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

I.B.2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.3) On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.4) Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.C – ***Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle***

I.C.1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

I.C.2)

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant s - S_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

I.C.3) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, ..., r-1\},\ f^{(k)}(\ell) = 0$.

Exercice 2

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx}\, \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\, e^{-u})^n \,\mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\, y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\, e^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,
$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :
$$T_n(x) = e^{nx}\, \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u\, e^{-u})^n \, \mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1}\, u\, e^{-u}$ *pour* $u \geq x$.