2022-2023 | **Devoir surveillé 4** | PSI

Devoir surveillé 4

Espaces vectoriels normés - 2h

Exercice 1

1. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante admet une limite en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

2. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante n'a pas de limite en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

3. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^2+3x^2y+7y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$.

Exercice 2

Montrer que

1. $S_n(\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Une ellipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble de polynômes de degré 2 ayant 2 racines réelles distinctes est un ouvert de $\mathbb{R}_2[X]$
4. Montrer que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3

On dit qu'une matrice est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si :

- Tous les coefficients de M sont dans $[0,1]$,
- La somme des coefficients d'une même ligne fait 1.

1. Posons U la matrice colonne ne contenant que des 1. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ est une matrice stochastique si et seulement si $AU = U$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
2. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4

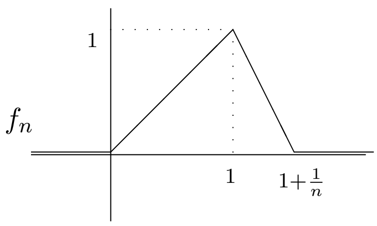
1. Déterminer une suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ convergeant pour $\|\_\|_1$ mais pas pour $\|\_\|_\infty$.
2. Montrer que si une suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ convergent pour $\|\_\|_\infty$, elle converge aussi pour $\|\_\|_1$.

Exercice 5

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons pour tout f de E :

$$N_1(f) \;=\; |f(0)| + \underset{x\neq y\in\mathbb{R}}{Sup}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \qquad\qquad N_2(f) \;=\; |f(0)| + \underset{x\in\mathbb{R}^*}{Sup}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note f_n l'application affine par morceaux :



$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ -nx+n+1 & \text{si} \quad x \in \left[1, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left[0, 1+\frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

   Calculer $N_1(f_n)$ et $N_2(f_n)$.

4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?