2022-2023 **Devoir surveillé 4 - Version difficile** PSI

Devoir surveillé 4 - Version difficile

Espaces vectoriels normés - 2h

Exercice 1

Soient $(E, \|\_\|)$ un espace vectoriel normé et A un sous ensemble non vide de E tel que son complémentaire A^c soit non vide. Considérons également x dans A et y dans A^c et l'application f de $[0,1]$ dans E définie par :

$$f(t) \quad = \quad (1-t)x \; + \; ty$$

1. Construisons par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de $[0,1]$. Posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et pour tout n fixé dans $\mathbb{N}$:

$$\text{Si } f\left(\tfrac{a_n+b_n}{2}\right) \in A, \; \left\{ \begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} & = & b_n \end{array} \right. \qquad \text{sinon} \; \left\{ \begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{a_n+b_n}{2} \end{array} \right.$$

   Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune que l'on notera l.
2. Montrer que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(l)$.
3. En déduire que les ouverts et fermés de E sont exactement E et $\emptyset$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et N une application de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $\forall x \in E, \;\; N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $\forall x \in E, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$

Notons $B = \{x \in E \;/\; N(x) \leq 1\}$.

1. Montrer que si N est une norme alors B est convexe.
2. Supposons dans cette question que B est convexe. Montrer que pour tout x et y non nuls de E, on a :

$$\frac{N(X)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} \;\; + \;\; \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)} \;\; \in \;\; B$$

   En déduire que N est une norme.
3. Soit p dans $[1;+\infty[$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in [0,1], : \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad (\lambda.x + (1-\lambda).y)^p \;\; \leq \;\; \lambda.x^p + (1-\lambda).y^p$$

4. En déduire que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p \;\; = \;\; \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 3

Partie I. Une norme sur $\mathbb{R}[X]$

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on note :

$$\|P\|_A = \operatorname*{Sup}_{x\in A} |P(x)|$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que si A est infini et borné alors $\|\_\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Réciproquement, montrer que si A n'est pas infini ou n'est pas borné alors $\|\_\|_A$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
On supposera dans le reste de l'exercice que A est infini et borné.

$\boxed{\text{Q3}}$ Rappeler la définition de $\overline{A}$ l'adhérence de A, puis montrer que :

$$a \in \overline{A} \iff \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \overline{A},\quad |P(a)| \leq \varepsilon + \|P\|_A$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, $\|P\|_A = \|P\|_{\overline{A}}$

$\boxed{\text{Q6}}$ Enfin montrer que :

$$\|P\|_{\overline{A}} = \operatorname*{Max}_{x\in \overline{A}} |P(x)|$$

Partie II. CNS pour que la fonction évaluation soit continue.

Dans cette partie, on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\_\|_A$ définie dans la partie I. Pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, posons :

$$\delta_{x_0} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(x_0) \end{array}$$

Le but de cette partie est de montrer que δ_{x_0} est continue si et seulement si x_0 est dans $\overline{A}$

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrer que si x_0 est dans $\overline{A}$ alors δ_{x_0} est lipschitzienne.

$\boxed{\text{Q8}}$ Supposons à présent que x_0 n'est pas dans $\overline{A}$. Justifier l'existence de r et M dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall a \in A,\quad r \leq |a - x_0| < M$$

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons :

$$P_n(x) = \left(1 - \left(\frac{x - x_0}{M}\right)^2\right)^n$$

Montrer que $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Pour la norme $\|\_\|_A$)

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire que δ_{x_0} n'est pas continue si x n'est pas dans $\overline{A}$.