2022-2023 | **Devoir surveillé 3** | PSI

Devoir surveillé 3

Réduction endomorphismes - Intégrales généralisées - 4h

Exercice 1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A^2$ et $tr(A) = 0$.
2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{N}$ et $0 \leq tr(A) \leq 4n$.
3. Soit A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrer que $det(A) > 0$.

Exercice 2

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$$

Exercice 3

1. Les sous-questions sont indépendantes.

   (a) On considère la fonction

   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   On **admet** l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

   ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

   (d) On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot$

   Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t>0$, $h_n(t)=\sin^n t$.
   Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier l'existence d'un réel $K>0$ pour lequel, pour tout réel t, on a : $\left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant K$.

   (b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

      ii. Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

   (c) Justifier, pour tout entier $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$.

   (d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{i(2n-2k)t}.$$

   (b) En déduire, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j} j^{2n-1}\sin(2jt).$$

   (c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$.

5. `Étude asymptotique de la suite de terme général` $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$

   (a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   (b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cdot$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\cdot$

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant 2u$.

ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(1 - \mathrm{e}^{-nt^3}\right) \mathrm{d}t,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\,\frac{\ln^4 n}{n}\cdot$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}\cdot$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ et a un réel.
On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + aXP.$$

1. Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.
   Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.
2. Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.
   Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.
3. Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.
   On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.
4. Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.
5. Expliquer comment construire à l'aide Φ_a un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 8, \dots, 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 5

Dans tout ce problème, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. L'application identité de E est notée id. Si f est un endomorphisme de E, pour toute valeur propre λ de f on note $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de f relatif à λ.

Q1. Dans cette question seulement, E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n = 4$. On le munit d'une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et on considère les endomorphismes u et v représentés dans la base $\mathcal{B}$ par les matrices

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a) Montrer que u et v sont des symétries, et vérifier rapidement que $u \circ v = -v \circ u$.

1.b) Calculer $\operatorname{tr} u$ et $\operatorname{tr} v$; montrer que cela permet de déterminer la dimension des sous-espaces propres de u et de v (sans avoir à déterminer ces derniers explicitement).

1.c) Déterminer une base (e_1, e_2) de $\mathrm{E}_1(u)$. Montrer que la famille (e_3, e_4) définie par $e_3 = v(e_1)$ et $e_4 = v(e_2)$ est une base de $\mathrm{E}_{-1}(u)$.

Si l'on pose $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, justifier que $\mathcal{E}$ est une base de E et déterminer la matrice représentative de u et de v dans la base $\mathcal{E}$.

On revient au cas général ; n est maintenant supposé quelconque. Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant

$$u^2 = v^2 = \mathrm{id} \qquad \text{et} \qquad u \circ v + v \circ u = 0.$$

Q2. Montrer que $\operatorname{tr}(u \circ v) = 0$.

Q3. Montrer que $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} v = 0$.

Q4. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \oplus \mathrm{E}_{-1}(u)$ et expliciter, pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, la décomposition de x dans cette somme directe.

Q5. Montrer que la dimension de E est paire. On notera $n = 2k$, avec k un entier naturel.

Q6. Montrer que $v\big(\mathrm{E}_1(u)\big) = \mathrm{E}_{-1}(u)$ et que $v\big(\mathrm{E}_{-1}(u)\big) = \mathrm{E}_1(u)$.

Q7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k})$ de E dans laquelle les matrices de u et de v s'écrivent, par blocs :

$$\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{mat}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right)$$