2022-2023

Devoir surveillé 2

PSI

Algèbre linéaire 4h

Exercice 1

Considérons la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} \;=\; 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer A telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
   On rappelle que dans ce cas, $E = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
   Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j. \tag{$*$}$$

2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable**.
   On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

   (2.1) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)p_j$.

   (2.2) Montrer que u est diagonalisable.
   On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

   (2.3) Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

   2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

   2.3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

   2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

   (2.4) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

   (2.5) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Notations et définitions

- Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée.
- $\mathbf{M}_p(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$. $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
- On note I_p la matrice identité de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ et 0_p la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ ne comportant que des 0.
- On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Q20. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Q21. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in [\![1, n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in [\![1, n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q22. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.

Q23. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$

Q24. En utilisant la question **Q23**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q25. Établir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q26. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1, n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1, n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q28. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in [\![2, n-1]\!] \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \; u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)\, u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q29. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont on précisera la dimension.

Q30. Déterminer l'ensemble E des suites $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q31. En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q32. En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II - Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

Q33. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

Q34. *D*ans le cas où D est inversible, montrer :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC).$$

Considérons une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q37. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}\,;\, \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q38. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu\, x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.