Devoir surveillé 2 - Version difficile

Algèbre linéaire 4h

Problème 1

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.
Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q8. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q9. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Q10. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :
première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;
deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

Q11. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ . & . & . & . & a_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.

Q12. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $uou \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2.

Q13. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q14. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

Q15. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q16. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q18. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problème 2

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $M^\top$ la transposée de la matrice M.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = MM^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, ..., $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

Q 1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

A – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

Q 2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q 4. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.

Q 5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

Q 6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

B – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

Q 7. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et que $2r \leqslant n$.

Q 8. On suppose que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, ..., e_r de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_r, u(e_r))$ est une base de E.

Q 9. Donner la matrice de u dans cette base.

Q 10. On suppose $\operatorname{Im} u \neq \operatorname{Ker} u$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, ..., e_r de E et des vecteurs v_1, v_2, ..., v_{n-2r} appartenant à $\operatorname{Ker} u$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), ..., e_r, u(e_r), v_1, ..., v_{n-2r})$ est une base de E.

Q 11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

C – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.

Q 13. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

Q 14. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n.

Q 15. Montrer la réciproque de la question 12.

Q 16. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q 17. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

Q 18. Démontrer que 0 est racine de P.

Q 19. On note m la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

I.D – Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

D.1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q 20. Calculer la trace et le rang de A. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q 21. Démontrer que A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P \operatorname{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R.

Q 22. Démontrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q 23. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.

On pourra considérer $R' = P^{-1} R P$.

D.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q 24. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.