Mars 2023

Devoir surveillé 10

Calculatrice interdite

Probabilité - Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = P(Y=k) = p\, q^k$$

où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.
3. Calculer $P(X=Y)$ et $P(X<Y)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X+Y$.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t|<1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X=n)$ et $\mathbb{P}(Y=n)$.
5. Soient $S = X+Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S=n)$.
6. **Calculs d'espérances et de variances.**
   6.1. Justifier que la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
   6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.
   6.5. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Démontrer que si $|x| + |y| \geqslant 4$ alors $f(x, y) \geqslant 0$.
3. f admet-elle des extrema globaux ?

Exercice 4

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0,0)$?
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?