PSI - Sept. 2022 **Devoir surveillé n^{o}1** Calculatrices interdites

Algèbre linéaire

Exercice 1

Soient n dans $\mathbb{N}$ et $a_0, \ldots a_n$ des réels distincts. Pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$, on note L_i le $^{\text{ième}}$ polynôme de Lagrange c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant :

$$deg(L_i) \leq n \qquad\qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ L_i(a_j) = \delta_{ij}$$

1. Rappeler l'expression factorisée de L_i.
2. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

   $$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n) = 0$$

   Montrer que : $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0$
3. La question précédente nous permet de conclure à la liberté d'une certaine famille. De quelle famille s'agit-il ? Dans quel espace vectoriel ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice on identifie polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynôme associée. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ unitaire (le coefficient dominant est égal à 1).

1. Soit α dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$, on a : $|z - \alpha| \geq |Im(z)|$.
2. Montrer en utilisant une factorisation de P que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors :

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |Im(z)|^{\deg(P)}$$

   où $deg(P)$ désigne le degré de P.
3. On prend dans cette question uniquement $P = X^3 + 1$.
   a) Donner une décomposition de P en polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{C}[X]$, puis sur $\mathbb{R}[X]$.
   b) Déterminer z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que : $|P(z_0)| < |Im(z_0)|^{deg(P)}$.
4. On suppose dans cette question que :

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |Im(z)|^{\deg(P)}$$

   Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé.
5. Énoncer clairement le résultat obtenu.

Exercice 3

Pour tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on désigne par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de coefficients (a_{ij}) tous nuls sauf ceux tels que :

$$\forall k \in \{1,\dots,n-1\}, a_{k+1,k} = n-k, a_{k,k+1} = k$$

Ainsi pour les premières valeurs de n, on a :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les déterminants de A_2, A_3, A_4 et A_5.
2. On désigne par ϕ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par :
$$\phi(P) = (n-1)XP(X) + (1-X^2)P'(X)$$
où P' désigne la dérivée du polynôme P. Calculer $\phi(X^k)$.
3. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
4. Comparer la matrice de ϕ dans $\beta = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ et la matrice A_n.
5. On définit pour tout h de $\{1,\dots,n-1\}$ le polynôme $P_h = (X-1)^h(X+1)^{n-1-h}$ et le réel $\lambda_h = n-1-2h$. Montrer que $\phi(P_h) = \lambda_h P_h$ pour tout h de $\{1,2,\dots,n-1\}$.
6. Notons $\beta' = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$. Déterminer la valeur de $(P_h)^{(k)}(-1)$ pour tout $k \leq n-1-h$ où $(P_h)^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P_h.
7. Montrer en utilisant le résultat de la question précédente que β' est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
8. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.
9. En déduire pour quelles valeurs de n on a A_n inversible ?

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k(1-t)^{n-k}$$

On note $\mathcal{F}$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée des polynômes $(p_{0,n}(X), p_{1,n}(X), \ldots, p_{n,n}(X))$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les polynômes $\varphi_n(P)$ et $B_n(P)$ par :

$$\varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

et

$$B_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) p_{k,n}(X).$$

où $P'(X)$ est le polynôme dérivé de P

1. Montrer que φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_n(p_{k,n})(X) = k\, p_{k,n}(X)$.
3. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Déterminer la matrice de φ_n dans cette base.
5. Montrer que φ_n n'est pas bijectif et que B_n est bijectif.

Exercice 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et on note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $Gl_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

1. Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.
2. Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leq n!$ et qu'il n'y a pas égalité.
3. Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leq n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.
4. Notons $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$. Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$.
5. Déterminer les valeurs propres réelles des matrices de $\mathcal{X}'_2$.
6. Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?