Mars 2023 **Correction devoir surveillé 9** Calculatrice interdite

Concours blanc

Partie I : Analyse

1.

1.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $t \geq 0$, $f_n'(t) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{n!}(n-t)$.

f_n est donc croissante sur $[0;n]$, décroissante sur $[n;+\infty[$ et $f_n(0) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t)$, $f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$.

Par conséquent, le maximum de f_n sur $\mathbb{R}^+$ est $\dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$, atteint en n.

1.b. Grâce à la formule de Stirling, $f_n(n) \sim \dfrac{e^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}$ et donc, en simplifiant $f_n(n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}n^{1/2}}$.

1.c. Les deux questions précédentes montrent que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$: la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

2.

2.a. Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $g_x : t \mapsto e^{-t}t^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, g_x est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.

g_x est à valeurs positives donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$ est convergente si et seulement si g_x est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par croissance comparée, quand t tend vers l'infini, $g_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $2 > 1$ donc g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$.

En O^+, $g_x(t) \sim \dfrac{1}{t^{-x}}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $-x < 1$ soit $x > -1$.

On peut alors conclure que $D =]-1;+\infty[$; D contient bien $\mathbb{R}^+$.

2.b. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On pose $h : t \mapsto (\ln t)e^{-t}t^x$.

h est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.

Pour $t > 1$, $t^2h(t) = \dfrac{\ln t}{t}t^{x+3}e^{-t}$ donc, par croissance comparée, $h(t) = o(1/t^2)$: h est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Pour $t \leq 1$, $|h(t)| \leq |\ln t|$ et ln est intégrable sur $]0;1]$ donc h aussi.

h est donc intégrable sur $]0;+\infty[$ ce qui prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^x dt$.

2.c. Soit $g : (x,t) \mapsto e^{-t}t^x$.

D'après la question 2.a., pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x,t) = e^{-t}e^{x\ln t}$ donc $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (\ln t)e^{-t}t^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.

Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in [a;b]$, si $t \geq 1$, $t^x \leq t^b$ et si $0 < t \leq 1$, $t^x \leq 1$ donc $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln(t)e^{-t}t^b| + |\ln t|e^{-t}$.

$\varphi : t \mapsto |\ln(t)e^{-t}t^b| + |\ln t|e^{-t}$ est la somme de deux fonctions continues par morceaux et intégrables donc φ l'est aussi.

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2.d. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \in D$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. Par linéarité, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est aussi convergente.

2.e. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1$".

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour $t \geq 0$, on pose $u(t) = t^{n+1}$, $v'(t) = e^{-t}$ et $u'(t) = (n+1)t^n$, $v(t) = -e^{-t}$.

Par croissance comparée, uv a des limites finies en 0 et en $+\infty$ et u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = [-(n+1)t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

En divisant par $(n+1)!$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)dt = 1$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1$.

3.

3.a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt + \int_x^{+\infty} f_n(t)dt = 1$; on en déduit

$$H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t)dt$$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$ est une primitive de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent H_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $H_n'(x) = -f_n(x)$. f_n étant continue, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

3.c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

H_n est en particulier continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} H_n(x) = H_n(0) = 1$.

Par définition d'intégrale généralisée convergente, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} H_n(x) = 0$.

3.d. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; x]$ et la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0; x]$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f(t)dt = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} H_n(x) = 1$.

4. **4.a.** f_n atteint son maximum en n donc la représentation graphique de f_1 est $\mathcal{C}_a$, celle de f_5 est $\mathcal{C}_c$.

4.b. Quand n augmente le maximum de f_n est de plus en plus petit (graphiquement : le point de plus haute ordonnée est de plus en plus bas).

L'aire sous chacune des courbes est égale à 1.

5.

5.a. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{t^n}{n!}$ converge et a pour somme e^t donc la série $\sum f_n(t)$ converge : la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

5.b. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; a]$, $|f_n(t)| \leq \dfrac{a^n}{n!}$ $(0 \leq e^{-t} \leq 1$ et $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus la série $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0; a]$.

5.c. D'après la question 1.b. et par comparaison aux séries de Riemann, $\sum ||f_n||_{\infty, \mathbb{R}^+}$ diverge donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 2 : Probabilité

1.

1.a. Par hypothèse, $S_1 = X_1$ suit une loi de Poisson de paramètre 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, S_n suit une loi de Poisson de paramètre n, X_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre 1 et S_n, X_{n+1} sont indépendantes (résultat admis dans l'énoncé) donc S_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre $n+1$.
Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
Par conséquent, $E(S_n) = V(S_n) = n$.

1.b. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n^*) = 0$.
Pour une variable aléatoire admettant une variance, $V(aX+b) = a^2V(X)$ donc $V(S_n^*) = 1$.

1.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt{n} \geq 0$ donc $P(S_n^* \leq 0) = P(S_n \leq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)$ et, par définition de la loi de Poisson,

$$P(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On applique la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $f = \exp$ qui de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^+$ avec les bornes $a = 0$ et $b = n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$ et $f(0) = 1$ donc

$$e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t}t^n}{n!} dt$$

3.

3.a. On multiplie la relation précédente par e^{-n} :

$$1 = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{-t}t^n}{n!} dt$$

Donc, avec les questions II.1.c. et I.3.a., $P(S_n^* \leq 0) = H_n(n)$.

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question précédente puis la relation de Chasles nous donnent :

$$\begin{aligned} P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) &= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt - \int_{n+1}^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt \\ &= \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt \end{aligned}$$

Dans la denière intégrale, on pose $v'(t) = e^{-t}$, $u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v(t) = -e^{-t}$, $u'(t) = \dfrac{t^n}{n!}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n; +\infty[$ et uv a une limite finie (nulle) en $+\infty$ donc, par intégration par parties,

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} - \int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt$$

et, après simplification,

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$$

3.c. On a donc $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \displaystyle\int_n^{n+1} f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(n)$ et f_{n+1} est croissante sur $[n; n+1]$ donc, pour tout $t \in [n; n+1]$, $f_{n+1}(t) \geq f_{n+1}(n)$ et, en intégrant sur $[n; n+1]$,

$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) \geq 0.$

Ceci étant pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par ailleurs elle est minorée par 0 (suite de probabilités) donc elle converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq l \leq P(S_n^* \leq 0) \leq P(S_1^* \leq 0)$ donc, en passant à la limite, $0 \leq l \leq H_1(1)$.

$H_1(1) = 1 - \displaystyle\int_0^1 f_1(t)dt$ avec f_1 continue positive non identiquement nulle sur $[0;1]$ donc $H_1(1) < 1$.

On en déduit que $l \in [0;1[$.

3.d. Méthode numérique : on utilise la question 1.c. pour une valeur de n assez grande.

Avec le programme :

```
def approx(n):
    p,f,s=1,1,1
    for k in range(1,n+1):
        p=p*n
        f=f*k
        s=s+p/f
    return(s*exp(-n))
```

et $n = 100$, on obtient environ $0,51$.

Méthode probabiliste : Comme on ne peut pas directement simuler une loi de Poisson, on utilise une loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{1}{N}$ avec N assez grand. On en déduit des valeurs qui suivent une loi proche de la loi de Poisson de paramètre 1. Ensuite, on construit S_n puis S_n^*. On calcule alors la fréquence d'obtention de $S_n^* \leq 0$ sur un grand nombre de réalisations.

```
from math import sqrt
from random import random
def bino(n,p):
    s=0
    for k in range(n):
        if random()<=p:
            s=s+1
    return(s)
def Sn(n,N):
    s=0
    for k in range(n):
        s=s+bino(N,1/N)
    return(s)
def Snet(n,N):
    return((Sn(n,N)-n)/sqrt(n))
def estimation(m,n,N):
    s=0
    for k in range(m):
        if Snet(n,N)<=0:
            s=s+1
    return(s/m)
```

et voici les résultats obtenus sur 10 réalisations en prenant $m = n = N = 1000$:

`[0.55, 0.6, 0.48, 0.52, 0.47, 0.49, 0.52, 0.59, 0.5, 0.51]`

Le problème est qu'on ne dispose pas de contrôle sur la précision de nos résultat (pas d'estimation du reste dans la méthode numérique et aucun renseignement pour la méthode probabiliste).

4.

4.a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{(nt)^k}{k!}$. Cette série converge puisqu'il s'agit d'une série exponentielle et

$$G_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}$$

4.b. Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$t^{S_n^*} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n - n} = (t^{1/\sqrt{n}})^{S_n} \times t^{-\sqrt{n}}$ et, par linéarité de l'espérance, $t^{S_n^*}$ admet une espérance et

$$E(t^{S_n^*}) = \frac{G_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}$$

4.c. Avec les deux questions précédentes, $E(t^{S_n^*}) = \dfrac{\exp\left(n(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\right)}{t^{\sqrt{n}}}$.

Quand u tend vers 0, $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ donc $t^{1/\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{\ln t}{\sqrt{n}} + \dfrac{(\ln t)^2}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$ et $n(t^{1/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n}\ln t + \dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1)$. Par conséquent, avec $t^{\sqrt{n}} = \exp(\sqrt{n}\ln t)$, $E(t^{S_n^*}) = \exp(\dfrac{(\ln t)^2}{2} + o(1))$.

Par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(t^{S_n^*}) = \exp\left(\dfrac{(\ln t)^2}{2}\right)$.

Problème 2 : Algèbre

1. On peut choisir $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Tous les coefficients de A_3 sont dans $\{-1; 1\}$ donc $A_3 \in \mathcal{B}_3$.

$A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc A_3 n'est pas dans $\mathcal{H}_3$.

On calcule le déterminant de A_3 en ajoutant C_3 à C_1 :

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et, en développant par rapport à la première colonne, $\det(A_3) = 4 \neq 0$ donc $A_3 \in \mathcal{G}_3$.

3.

3.a. Tous les coefficients de A_4 sont dans $\{-1; 1\}$ donc $A_4 \in \mathcal{B}_4$.
En effectuant le produit matriciel, on trouve $A_4^T A_4 = 4I_4$ donc $A_4 \in \mathcal{H}_4$.

3.b. A_4 est une matrice symétrique donc $A_4^2 = 4I_4$ et $S^2 = I_4$. On a donc $\varphi^2 = id_{\mathbb{R}^4}$ et φ est une symétrie.
Soit λ une valeur propre de φ et x un vecteur propre associé. $\varphi(x) = \|x$ donc $\varphi^2(x) = \lambda^2 x$ et $x = \lambda^2 x$. x est un vecteur propre donc x est non nul et $\lambda^2 = 1$. Par conséquent $Sp(S) \subset \{-1; 1\}$.
Si 1 n'est pas valeur propre de S, alors $S - I_4$ est inversible et, comme $S^2 - I_4 = (S - I_4)(S + I_4) = 0$, $S + I_4 = 0$. Ceci est absurde donc 1 est valeur propre de S. On démontre de même que -1 est valeur propre de S.
Par double inclusion, on a donc $Sp(S) = \{-1; 1\}$.

3.c. A_4 est une matrice symétrique réelle donc A_4 est diagonalisable. Comme $A_4 = 2S$, $\chi_{A_4}(X) = \det(XI_4 - 2S) = 2^4\chi_S(\frac{X}{2})$ et $Sp(A_4) = \{-2; 2\}$. (pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{A_4}(\lambda) = 0$ si et seulement si $\frac{\lambda}{2} \in \{-1; 1\}$).

3.d. Il faut trouver les sous espaces propres de A_4 qui sont les mêmes que ceux de S. Comme la trace de A_4 est nulle, les deux sous espaces propres sont de dimension 2.
Pour obtenir les colonnes de P, on cherche une base orthonormale de chaque sous espace propre (on peut par exemple chercher une base puis l'orthonormaliser avec le procédé de Schmit).

4. Soit $A \in \mathcal{H}_n$. n est non nul donc $\dfrac{1}{n}A^T A = I_n$ ce qui prouve que A est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{n}A^T$. Par conséquent $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. Par définition on a aussi $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ donc finalement $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$.
On peut considérer que $\mathcal{B}_n$ est l'ensemble des n^2-listes d'éléments pris dans $\{-1; 1\}$ donc $\mathcal{B}_n$ est un ensemble fini de cardinal 2^{n^2}.

5. Soit $A \in \mathcal{B}_n$.

On suppose i).

Pour tous i et j entre 1 et n, $(A^T A)_{i,j} = C_i(A)^T C_j(A)$ (produit par blocs) donc, si i est différent de j, $C_i(A)^T C_j(A) = 0$: la famille $(C_j(A))_{1 \le j \le n}$ est orthogonale.

On a donc l'implication $i) \implies ii)$.

On suppose ii).

On note, pour j entre 1 et n, $C'_j = C_j(\frac{1}{\sqrt{n}}A)$.

Par hypothèse $(C'_1, \cdots, C'_n)$ est orthogonale.

Comme les coefficients de A sont dans $\{-1; 1\}$, la norme de $C_j(A)$ est $\sqrt{n}$ ($\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$) et donc la norme de C'_j est 1.

On en déduit que les colonnes de la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est une matrice orthogonale.

On a montré l'implication $ii) \implies iii)$.

On suppose iii).

Alors $A' = \frac{1}{\sqrt{n}}A$ est orthogonale donc $A'^T A' = I_n$ et, en multipliant par n, $A^T A = nI_n$: $A \in \mathcal{H}_n$ (A est dans $\mathcal{B}_n$). On a donc $iii) \implies i)$.

On peut alors conclure que les trois propositions sont équivalentes.

6.

6.a. Pour i entre 2 et n, on multiplie $L_i(A)$ par $A_{1,1}$ donc $det(A') = A_{1,1}^{n-1} \det(A)$.

6.b. Pour i entre 2 et n et j entre 1 et n, $A'_{i,j} = A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$.

Pour $j = 1$, on a donc $A'_{i,j} = 0$ et pour $j \ge 2$, $A'_{i,j}$ est la différence de deux nombres qui sont égaux à 1 ou -1 donc est égale à -2, 0 ou 2.

Par conséquent, $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec B' matrice carrée de taille $n-1$ dont tous les coefficients sont dans $\{-2, 0, 2\}$.

A' est alors triangulaire par blocs donc $\det(A') = A_{1,1} \det(B')$ avec A' inversible et $A_{1,1}$ non nul donc $\det(B') \neq 0$: B' est inversible.

6.c. En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, $\det(B') = 2^{n-1} \det(B'')$ où B'' est une matrice dont tous les coefficients sont dans $\{-1; 0; 1\}$. Par conséquent $\det(A')$ est un multiple de 2^{n-1}. Comme $\det(A')$ et $\det(A)$ sont égaux au signe près ($A_{1,1}$ vaut 1 ou -1), $\det(A)$ est aussi un multiple de 2^{n-1}.

6.d. $A \in \mathcal{H}_n$ et $\det(A^T) = \det(A)$ donc $\det(A)^2 = \det(nI_n) = n^n$. Ainsi, $|\det(A)| = n^{n/2}$.

D'après la question précédente, 2 divise $n^{n/2}$ donc on peut écrire $n = 2p$: $|det(A)| = (2p)^p$ et 2^{2p-1} divise $2^p p^p$ 2^{p-1} divise p^p ; en particulier 2 divise p. On en déduit que n est un multiple de 4.

4.

7.a. Soient $x = (x_1, \cdots, x_r)$, $y = (y_1, \cdots, y_r)$ deux éléments de $\mathbb{R}^r$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \tau_r(x + \lambda y) &= \tau_r(x_1 + \lambda y_1, \cdots, x_r + \lambda y_r) \\ &= (x_2 + \lambda y_2, x_1 + \lambda y_1, x_3 + \lambda y_3, \cdots, x_r + \lambda y_r) \\ &= (x_2, x_1, x_3, \cdots, x_r) + \lambda(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_r) \\ &= \tau_r(x) + \lambda \tau_r(y) \end{aligned}$$

τ_r est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^r$.

De plus, si $\tau_r(x) = 0$, alors $x = 0$ donc τ_r est injectif. Un endomorphisme injectif en dimension finie est bijectif donc τ_r est un automorphisme de $\mathbb{R}^r$.

7.b. $\tau_r(1,0,\cdots,0)=(0,1,0,\cdots,0)$, $\tau_r(0,1,0,\cdots,0)=(1,0,\cdots,0)$ et, si $i\geq 0$, $\tau_r(e_i)=e_i$ (e_i ième vecteur de la base canonique). Par conséquent, $T_r=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & I_{r-2}\end{pmatrix}$ où $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

7.c. T_r est la matrice d'un automorphisme donc T_r est inversible et A aussi.
Les opérations élémentaires, $L_i\leftarrow L_1-L_i$ ne modifient pas le rang de la matrice donc A' est inversible.

La première colonne de A' est $\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, sur la première ligne de A', il n'y a que des 1.

Soient i et j supérieurs ou égaux à 2.
Si $(T_r)_{i,j}=1$, alors $A'_{i,j}=1-2=-1$ et si $(T_r)_{i,j}=-1$, alors $A'_{i,j}=1$.
On peut alors conclure que $A'\in\mathcal{G}_n$.

8. On prend $r=4$ dans ce qui précède. On renommant A la matrice A' de la question 7. : $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&-1&1&1&1\\1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&-1&1&1\\1&1&1&1&-1&1\\1&1&1&1&1&-1\end{pmatrix}$.

A est dans $\mathcal{G}_6$ mais pas dans $\mathcal{H}_6$ car ses deux premières colonnes ne sont pas orthogonales.

9.

9.a. λ est une valeur propre de A donc on peut considérer un vecteur propre associé $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. On a alors $AX=\lambda X$ et donc, pour tout i entre 1 et n, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{i,j}x_j=\lambda x_i$.

$\{|x_i|;\ i\in[\![1;n]\!]\}$ est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ donc on peut considérer son plus grand élément m. il existe k entre 1 et n tel que $|x_k|=m$.
Comme X n'est pas nul, $x_k\neq 0$ et, par définition de m, pour tout j entre 1 et n, $|x_j|\leq|x_k|$.

9.b. On a en particulier $|\lambda||x_k|=\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n}A_{kj}x_j\right|$ et, d'après l'inégalité triangulaire, $|\lambda||x_k|\leq\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|A_{kj}||x_j|$.
A_{kj} vaut 1 ou -1 donc $|A_{kj}|=1$ et, pour tout j, $|x_j|\leq|x_k|$ donc $|\lambda||x_k|\leq n|x_k|$ et, comme $|x_k|$ est non nul, $|\lambda|\leq n$.

9.c. Ce qui précède prouve que le sup existe et est inférieur ou égal à n.
Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver une matrice $A\in\mathcal{B}_n$ qui admet n comme valeur propre.
On peut choisir la matrice A dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A\in\mathcal{B}_n$ et si U est la colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, alors $AU=nU$ et U n'est pas nul donc n est valeur propre de A. On a donc l'égalité :

$$\sup\left((\{|\lambda|\ \text{ tel que }\ \lambda\in Sp(A)\ \text{ et }\ A\in\mathcal{B}_n\}\right)=n$$