Fev. 2023

Correction devoir surveillé 8

Calculatrice interdite

Séries entières - Intégrales à paramètres

Exercice 1

1) a) Pour $t=0$: $f(0)=1$. Pour $t\neq 0$: $f(t)=\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-ts}}{-t}\right]_{s=0}^{s=1}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

b) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. Le développement limité en 0 de $\mathrm{e}^{-t}=1-t+o(t)$ entraine que $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=1=f(0)$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $s\in]0,1]$, on a $t<u\Rightarrow e^{-su}<e^{-st}\Rightarrow f(u)<f(t)$. Enfin, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{-t}=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.
f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.

c) $\mathrm{e}^{-t}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-t)^n}{n!}$ avec un rayon de convergence infini donc $f(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n!}$ pour $t\neq 0$, égalité qui s'étend à $t=0$ puisque $f(0)=1$. Le rayon de convergence est infini.

2) a) Puisque le rayon de convergence est infini on peut intégrer terme à terme ce développement en série entière sur $[0,x]$ pour tout x réel et obtenir: $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n!)}$

b) Pour $x=1$ on obtient $S(1)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n!)}=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

3) a) Pour $x\in]-r,r[$ on peut dériver terme à terme et obtenir:
$\theta'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} na_nx^{n-1}$ et $\theta''(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_nx^{n-2}$.
En reportant dans l'équation différentielle on obtient:
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n\geqslant 0} na_nx^{n-1}-\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n-\sum_{n\geqslant 0} a_nx^{n+1}=1$ ou encore $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2a_nx^{n-1}-\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n-\sum_{n\geqslant 0} a_nx^{n+1}=1$. Posons $n=n'+2$ dans la première somme et $n=n'+1$ dans la deuxième:
$\displaystyle\sum_{n'\geqslant -2}(n'+2)^2a_{n'+2}x^{n'+1}-\sum_{n'\geqslant -1}a_{n'+1}x^{n'+1}-\sum_{n\geqslant 0}a_nx^{n+1}=1$ d'où en regroupant:
$a_1-a_0+\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}((n+2)^2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)x^{n+1}=1$.
Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on en déduit: $a_1-a_0=1$ et pour $n\geqslant 0$: $(n+2)^2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$.

b) Soit $K=\max(|a_0|,|a_1|)$. Montrons par récurrence double sur n que pour tout n on a $n!|a_n|\leqslant K$. C'est vérifié pour $n=0$ et $n=1$. Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$. On en déduit: $(n+2)!|a_{n+2}|=\dfrac{(n+1)!}{n+2}|a_{n+1}+a_n|\leqslant\dfrac{(n+1)!}{n+2}(|a_{n+1}|+|a_n|)\leqslant\dfrac{1}{n+2}(K+(n+1)K)=K$ en utilisant l'hypothèse de récurrence pour n et $n+1$. On a donc bien montré que pour tout $n\geqslant 0$: $|a_n|\leqslant\dfrac{K}{n!}$.
Soit une série entière associée à une suite (a_n) vérifiant $a_1-a_0=1$ et pour $n\geqslant 0$: $(n+2)^2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$. Puisque pour tout $n\geqslant 0$ elle vérifie $|a_n|\leqslant\dfrac{K}{n!}$ on en déduit que le rayon de convergence est infini, donc la somme de la série vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leq |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t} = \dfrac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.
$u(t)v(t) = \dfrac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
D'où, par intégration par parties, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.
• $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \dfrac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.

3. Soit $x \geq 0$.
$t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt}\\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$
donc $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4. • Soit $x > 0$.
Pour tout $t > 0$, $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leq +\infty$"), on a :
$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$
• Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

5. Soit $a > 0$.
— Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geq a > 0$).

— Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x\geq a$,

$$t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)e^{-xt}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $x\geq a$, pour tout $t>0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|-\sin(t)e^{-xt}|\leq e^{-xt}\leq e^{-at}=\varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a>0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x\geq a$,

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt.$$

6. F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc F est dérivable sur $\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt=-[u(x,t)]_0^{+\infty}=-\left(0+\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$,

$$F(x)=-\arctan(x)+K.$$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$, donc $-\frac{\pi}{2}+K=0$, donc $K=\frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x>0$,

$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

7. — Pour tout $t\in]0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
— Pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
— Pour tout $t\in]0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|f(x,t)|=\left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right|\leq e^{-xt}\leq 1=\varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1:x\mapsto\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

8. Soit $x\in[0,1]$.

• Pour tout $t\geq 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2}=\frac{1}{t^2}\times\left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right)=\frac{1}{t^2}\times\underset{t\to+\infty}{O}(1)=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t\mapsto\frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.

• Posons $w'(t)=\sin(t)e^{-xt}$, $w(t)=u(x,t)$, $v(t)=\frac{1}{t}$, $v'(t)=-\frac{1}{t^2}$.

w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

$w(t)v(t)=\frac{u(x,t)}{t}=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)\underset{t\to+\infty}{\to}0.$

$\int_1^{+\infty}w(t)v'(t)dt=-\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.

D'où, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty}f(x,t)dt=\int_1^{+\infty}w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned}F_2(x)&=\int_1^{+\infty}u'(t)v(t)dt=\left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt\\&=\frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}+\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$

9. •

— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.

— Pour tout $t \geq 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geq 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1}\times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.

• De plus, $x \mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

10. • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x)+F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

• On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$