2022-2023

Devoir surveillé 7 - Version normale

PSI

Correction - 4h

Exercice 1

Voir TD.

Exercice 2

1.1. Si $S \in S_n^+$ alors $\forall X,\ {}^tXSX \geq 0$. En particulier,

$$\forall i,\ \lambda_i = \lambda_i \|X_i\|^2 = {}^tX_iSX_i \geq 0$$

1.2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on peut l'écrire $X = \sum_{i=1}^n x_iX_i$ et alors, la base des X_i étant orthonormale,

$${}^tXSX = \left(\sum_{i=1}^n x_iX_i | \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Si les λ_i sont tous positifs alors ${}^tXSX \geq 0$ et $S \in S_n^+$.

1.3. Il existe une matrice orthogonale P telle que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P{-}1$. On a alors S inversible comme produit de telles matrices et

$$S^{-1} = P\mathrm{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)P^{-1}$$

Cette matrice est symétrique (car $P^{-1} = {}^tP$) et ses valeurs propres sont > 0 (ce sont les $1/\lambda_i$). On a donc (avec le résultat admis)

$$S^{-1} \in S_n^{++}$$

2.1. De manière immédiate,

$$\Delta^2 = D$$

En composant $NY = \mu Y$ par N, on obtient $N^2Y = \mu^2 Y$ et donc $DY = \mu^2 Y$ ce qui donne, en regardant coordonnée par coordonnée,

$$\forall i \in [|1, n|],\ \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$$

Si $y_i \neq 0$ alors $\mu^2 = \lambda_i$ et donc $\mu = |\mu| = \sqrt{\lambda_i}$ et donc $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$. Ceci reste bien sûr vrai si $y_i = 0$ et ainsi

$$\forall i \in [|1, n|],\ \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$$

Ceci s'écrit matriciellement $\mu Y = \Delta Y$ ou encore $NY = \Delta Y$. Comme N est symétrique, il existe une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour N. Ce qui précède donne $NY_i = \Delta Y_i$ pour tout i. Par combinaisons linéaires (et comme les Y_i forment une base), $NY = \Delta Y$ est vrai pour tout Y et donc

$$\Delta = N$$

(puisque les applications linéaires canoniquement associées à N et Δ sont égales).

2.2. Si la matrice T convient (on raisonne ici par conditions nécessaires) alors $T^2 = UD^tU$ et donc (comme ${}^tU = U^{-1}$)

$$({}^tUTU)^2 = {}^tUT^2U = D$$

${}^tUTU$ est symétrique et semblable à T donc à valeurs propres positives. C'est donc un élément de S_n^+. La question précédente indique que ${}^tUTU = \Delta$ et on a donc

$$T = U\Delta^tU$$

Réciproquement, il suffit de faire le calcul pour vérifier que pour ce choix de T, $T^2 = S$. De plus, T est symétrique et positive (semblable à Δ et donc à valeurs propres positives).
On a donc montré que

$$\forall S \in S_n^+,\ \exists! T \in S_n^+ /\ T^2 = S$$

3.1. On a

$$L_k(S)X_i = \left(\prod_{j\neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j}\right)\left(\prod_{j\neq k}(S - \mu_j I_n)\right) X_i$$

Comme $(S - \alpha I_n)X_i = (\lambda_i - \alpha)X_i$, on montre de proche en proche que

$$L_k(S)X_i = \left(\prod_{j\neq k} \frac{1}{\mu_k - \mu_j}\right)\left(\prod_{j\neq k}(\lambda_i - \mu_j)\right) X_i$$

Distinguons deux cas.
- Si $\mu_k = \lambda_i$ alors $L_k(S)X_i = X_i$.
- Sinon, λ_i est égal à iun μ_j avec $j \neq k$ et $L_k(S)X_i = 0$.

3.2. L_k est nul en μ_j pour $j \neq k$ et vaut 1 en μ_k. Ainsi,

$$P = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k$$

Avec la question précédente,

$$P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k} L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i} X_i$$

$(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres pour $P(S)$ et les valeurs propres de $P(S)$ sont exactement les $\sqrt{\lambda_i}$ et sont positives. Comme $P(S) \in S_n(\mathbb{R})$ on a finalement

$$P(S) \in S_n^+$$

On a $P(S)^2X_i = P(S)(P(S)X_i) = P(S)(\sqrt{\lambda_i}X_i) = \sqrt{\lambda_i}P(S)X_i = \lambda_i X_i = SX_i$. Ainsi $P(S)^2 = S$ (les endomorphismes canoniquement associés étant égaux sur une base). Par unicité, on a prouvé que

$$P(S) = \sqrt{S}$$

3.3. $(0, 1, 1)$ et $(1, -2, 0)$ sont vecteurs propres indépendants pour S associés à la valeur propre 3. Par considération de trace, la valeur propre restante vaut 9. Une résolution au brouillon montre que $(2, 1, -1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 9. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a exactement

$$\mathrm{Sp}(S) = \{3, 9\},\ E_3(S) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1), (1, -2, 0)),\ E_9(S) = \mathrm{Vect}((2, 1, -1))$$

Pour calculer $\sqrt{S}$, on recherche le polynôme interpolateur P :

$$P = \frac{3-\sqrt{3}}{6}X + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

(il vaut $\sqrt{3}$ en 3, 3 en 9 et est de degré ≤ 1) et ainsi

$$\sqrt{S} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}S + \frac{3\sqrt{3}-3}{2}I_n$$

Problème

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction S_1*

a) Pour tout réel $x > 0$, la série définissant $S_1(x)$ est géométrique de raison e^{-x} : elle converge donc si et seulement si $e^{-x} < 1$, soit $x > 0$, et on a donc :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

b) Lorsque x tend vers 0, $S_1(x)$ tend vers $+\infty$.
Et comme on a $e^{-x} = 1 - x + o(x)$, d'où $1 - e^{-x} \sim x$ en 0, on a donc $S_1(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0.

c) Lorsque x tend vers $+\infty$, $S_1(x)$ tend vers 1, et on a $S_1(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α* ($\alpha > 0$)

a) Pour $x = 0$, on a $e^{-x\,n^\alpha} = 1$ et la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.
Pour $x < 0$, le terme général $e^{-x\,n^\alpha}$ tend vers $+\infty$, et la série diverge par le même argument.

b) Pour tout réel $x > 0$, posons : $u_n(x) = n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$, soit en posant $t = x\,n^\alpha$:

$$u_n(x) = n^2\, e^{-x\,n^\alpha} = \frac{1}{x^{2/\alpha}}\, t^{2/\alpha}\, e^{-t}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $t = x\,n^\alpha$ tend vers $+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} t^{2/\alpha}\, e^{-t} = 0$ d'après les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielle. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
Par conséquent, on a $e^{-x\,n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
Ceci assure la convergence de la série à termes positifs $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) La série définissant $S_\alpha(x)$ converge si et seulement si $x > 0$ et S_α est définie sur $]\,0, +\infty[$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) On remarque que : $\forall\, x \geq \varepsilon,\ 0 \leq e^{-x\,n^\alpha} \leq e^{-\varepsilon\,n^\alpha}$.
Et comme $\varepsilon > 0$, la série $\sum e^{-\varepsilon\,n^\alpha}$ converge d'après la question précédente.
Donc la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Par théorème, on sait que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue. D'après ce qui précède, et d'après la continuité des fonctions $x \longrightarrow e^{-x n^\alpha}$, on obtient la continuité de S_α sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$. Comme tout réel $x > 0$ appartient à un tel intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, on en déduit que S_α est continue en tout réel $x > 0$, donc sur $]0, +\infty[$.

b) Si $0 < x \leq y$, on a $0 < x n^\alpha \leq y n^\alpha$, donc $e^{-x n^\alpha} \geq e^{-y n^\alpha}$, puis par sommation : $S_\alpha(x) \geq S_\alpha(y)$.
Ainsi, la fonction S_α est décroissante sur son intervalle de définition $]0, +\infty[$.
On sait par théorème qu'une fonction monotone admet des limites, finies ou infinies, aux bornes de son intervalle de définition. Donc S_α admet des limites finies ou infinies en 0 et $+\infty$.

c) Pour $n = 0$, on a : $\forall x > 0$, $e^{-x n^\alpha} = 1$. Et pour $n \geq 1$, on a $\lim_{x \to +\infty} e^{-x n^\alpha} = 0$.
De plus, on a vu que la série $\sum e^{-x n^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Le théorème de double limite s'applique donc au voisinage de $+\infty$ et permet d'affirmer :

$$\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} e^{-x n^\alpha} = 1.$$

d) La série $\sum e^{-x n^\alpha}$ étant à termes positifs, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x n^\alpha}.$$

Puisque S_α admet une limite finie ou infinie en 0, on peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente, ce qui implique, pour tout $N \in \mathbb{N}$, que $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Cette inégalité étant vérifiée pour tout entier naturel N, on a nécessairement $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*

a) Pour $x > 0$ et pour $n \leq t \leq n + 1$, on a $e^{-x(n+1)^2} \leq e^{-x t^2} \leq e^{-x n^2}$, d'où par intégration :

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t \leq e^{-x n^2}.$$

b) En sommant pour tout entier naturel n avec $x > 0$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$S_2(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t \leq S_2(x).$$

Enfin, en posant $u = t\sqrt{x}$ dans cette dernière intégrale, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-x t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$.

D'après l'inégalité précédente et selon la valeur rappelée de cette intégrale, il vient enfin :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

Soit encore, en transformant cette inégalité :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leq S_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 1.$$

c) D'après cette inégalité, on obtient $\lim_{x\to 0} S_2(x) = +\infty$.

Et on a $S_2(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en 0 car leur quotient tend vers 1 d'après l'encadrement suivant :

$$1 \le \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S_2(x) \le 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*

a) Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x\,n \le x\,n^2$, donc $e^{-x\,n^2} \le e^{-x\,n}$, d'où :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \le \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) En calculant la somme de cette série géométrique, on obtient plus précisément en $+\infty$:

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \le \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n} = \frac{e^{-2\,x}}{1-e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,e^{-x} = o(e^{-x}).$$

On a donc $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$, ce qui implique $S_2(x) - 1 \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$*

a) D'après l'inégalité 4.a) appliquée avec $x > 0$, on obtient pour tout entier naturel N :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-n^2\,x} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \le \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{N}^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide du changement de variables $u = x\,t^2$ dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \le \int_{N}^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\,N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{u}} \le \frac{1}{N\sqrt{x}}$ pour $u \ge x\,N^2$, on en déduit pour tout $N \ge 1$ que :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \le \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{x\,N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \le \frac{1}{2\,N\,x} \int_{x\,N^2}^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$

c) Ce qui précède montre qu'on a pour $N \ge 1$: $\sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \le S_2(x) \le \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} + \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'algorithme suivant donne donc un encadrement de $S_2(x)$ à ε près :

$N := 1$; $S := 1 + e^{-x}$; Erreur := $\frac{e^{-x}}{2\,x}$;

Tant que Erreur $> \varepsilon$ faire :

$N := N + 1$; $S := S + e^{-x\,N^2}$; Erreur := $\frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}$;

Ecrire N et S ;

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

a) Considérons pour $\alpha > 0$ et $u > 0$ la fonction $u \mapsto e^{-u}\, u^{\alpha-1}$.
Cette fonction est positive et continue sur $]\,0, +\infty[$ et elle est :
- équivalente en 0 à $u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}$, dont l'intégrale converge sur $]\,0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{u^2}$ (car $\lim_{+\infty} e^{-u}\, u^{\alpha+1} = 0$) dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

b) Une intégration par parties donne pour $0 < a < b$:

$$\int_a^b e^{-u}\, u^\alpha \,\mathrm{d}u \;=\; [-e^{-u}\, u^\alpha]_a^b \;+\; \alpha \int_a^b e^{-u}\, u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u.$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, il vient donc : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$.
Et comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on en déduit $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 6$, ...
Et par récurrence immédiate, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,!$.
Ainsi, la fonction Γ réalise une extrapolation de la fonction factorielle à $\mathbb{R}_+^*$.