Devoir surveillé 7 - Version difficile

Correction - 4h

Exercice

Soient $J = [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies sur J par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. À $x \in J$ fixé, la suite $\big(|f_n(x)|\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et de limite nulle. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées et est ainsi convergente, d'où la convergence simple de la série $\sum f_n$.

2. Pour $x \in J$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{nx}}$, terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 < 1$). Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge-t-elle absolument en aucun point et donc *a fortiori* pas normalement sur J (ni sur aucun intervalle, d'ailleurs).

3. Pour $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, la majoration du reste par le critère spécial et la décroissance de $|f_n|$ donnent

$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur J.

4. La convergence uniforme permet d'utiliser le théorème de la double limite. Ainsi, en utilisant le symbole de Kronecker,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} = 1.$$

5.1. La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann alternée ; elle vérifie les hypothèses du critère spécial (signe alterné, valeur absolue décroissante et de limite nulle) et est donc convergente.

5.2. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, de dérivée $h'(t) = -\dfrac{1}{2t^{3/2}}$ donne

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{2(nx)^{3/2}}$$

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right]$$

$$\left|\varphi(x) - 1 - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(nx)^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{2x^{3/2}}$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Problème

1. On montre successivement que la relation ORTS est réflexive, symétrique et transitive, ce qui ne pose pas de problème quand on sait de quoi il s'agit.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n \cup \mathcal{A}_n$. Puisque $A^T = \pm A$, les conditions (C_1), (C_2) et (C_3) sont vérifiées.
   Si $A \in \mathcal{S}_n$, le théorème spectral prouve que la condition (C_4) est vérifiée.
3. Soit $A \in \mathcal{O}_n$. A est inversible et A^T est l'inverse de A, donc $AA^T = A^TA (= I_n)$ et A est une matrice normale.
   Soit $X \in E_n$. $\|AX\| = \|X\|$ car l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à A est une isométrie. Il en est de même de l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à $A^{-1} = A^T$, donc la condition (C_3) est vérifiée.
4. Ici, $n = 2$. Soit r un réel strictement positif et $T \in \mathcal{O}_2$. rT vérifie de façon évidente la condition (C_4).
   Montrons que rT vérifie (C_1). D'après le théorème de Cayley-Hamilton,
   $(rT)^2 - \operatorname{tr}(rT)rT + \det(rT)I_2 = 0$, ce qui s'écrit aussi $rT(rT - \operatorname{tr}(rT)I_2) = -r^2\det(T)I_2$.
   Comme $r > 0$ et $\det(T) \neq 0$, on en déduit que $(rT)^{-1} = -\dfrac{1}{r^2\det(T)}(rT - \operatorname{tr}(rT)I_2)$, et, puisque T est une matrice orthogonale, $(rT)^T = -\dfrac{1}{\det(T)}(rT - \operatorname{tr}(rT)I_2) = P(rT)$
   avec $P = -\dfrac{1}{\det(T)}(X - \operatorname{tr}(rT))$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_1). Puisque pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes, $Q_1(A)Q_2(A) = (Q_1Q_2)(A)$, alors $AP(A) = P(A)A$, et A est une matrice normale.
6. Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_2), et $X \in E_n$.
   $\|A^TX\| = (A^TX)^TA^TX = X^TAA^TX = X^TA^TAX = (AX)^TAX = \|AX\|$.
7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition (C_3).
   $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $A^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$, et $b = c$, ou $c = -b$.
   Comme $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ et $A^T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, alors $ac + bd = ab + cd$, et, si $c = -b$ et $b \neq 0$, alors $a = d$.
   Finalement, la matrice A est soit symétrique, et vérifie la condition (C_4) d'après la question 2, soit de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $b \neq 0$, c'est-à-dire $A = rT$ avec $r = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, et vérifie la condition (C_4) d'après la question 4.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_3), λ un réel et $X \in \mathcal{M}_n$.

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda I_n)X\|^2 &= [(A-\lambda I_n)X]^T(A - \lambda I_n)X \\
&= X^TA^TAX - \lambda X^TA^TX - \lambda X^TAX + \lambda^2X^TX \\
&= X^TAA^TX - \lambda X^TA^TX - \lambda X^TAX + \lambda^2X^TX \text{ car } A \text{ vérifie } (C_3) \\
&= \|(A^T - \lambda I_n)X\|^2,
\end{aligned}$$

   ce qui prouve que $A - \lambda I_n$ vérifie (C_3).
9. D'abord A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Si λ est une de ces valeurs propres, et X un vecteur propre de A associé à λ, alors $\|(A - \lambda I_n)X\| = 0$, et, d'après la question 8, puisque A vérifie la condition (C_3), $\|(A^T - \lambda I_n)X\| = 0$: X est un vecteur propre de A^T associé à λ.

Comme $(A^T)^T = A$, on en déduit que $\ker(A - \lambda I_n) = \ker(A^T - \lambda I_n)$, et A et A^T ont les mêmes sous-espaces propres.

Ensuite, si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A, et X_1 et X_2 deux vecteurs propres respectivement associés à chacune des deux valeurs propres, $X_1^T A X_2 = X_1^T (A X_2) = \lambda_2 X_1^T X_2$ et $X_1^T A X_2 = (X_1^T A) X_2 = (A^T X_1)^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$ car X_1 est aussi un vecteur propre de A^T, associé à la valeur propre λ_1. Donc $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0$, et $X_1^T X_2 = 0$: X_1 et X_2 sont deux vecteurs orthogonaux, et les deux sous-espaces propres $\ker(A - \lambda_1 I_n)$ et $\ker(A - \lambda_2 I_n)$ sont orthogonaux.

10. Si A est diagonalisable, ses sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale : A est une matrice symétrique.

    Finalement, une matrice A vérifiant (C_3) est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

11. Montrons d'abord que toute matrice B ORTS à A vérifie encore (C_3). Soit $B = Q^T A Q$, où $Q \in \mathcal{O}_n$, et $X \in E_n$.

$$\begin{array}{rcl} \|B^T X\|^2 & = & (B^T X)^T B^T X \\ & = & X^T B B^T X \\ & = & X^T Q^T A Q Q^T A^T Q X \\ & = & Y^T A A^T Y \text{ en notant } Y = QX \\ & = & \|A^T Y\|^2 \\ & = & \|AY\|^2 \text{ car } A \text{ vérifie } (C_3) \\ & = & \|BX\|^2 \end{array}$$

    Ensuite, comme rappelé en début d'énoncé, l'endomorphisme ϕ_A de E_n canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable F.

    S'il s'agit d'une droite $\mathbb{R}.u$, avec u normé, alors, dans une base orthonormée de E_n dont le premier vecteur est u, la matrice de ϕ_A est de la forme $B = \begin{pmatrix} a_1 & L \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $a_1 \in \mathbb{R}$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-1}$, et A est ORTS à B. Ainsi B vérifie la condition (C_3).

    Ainsi $\left\| B^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$, ce qui s'écrit encore en utilisant le calcul par bloc $\begin{pmatrix} a_1 \\ L^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et prouve que $L = 0$.

    Reste à prouver que A_2 vérifie (C_3), ce qui se fait sans problème en utilisant le calcul par blocs.

    Si ϕ_A admet un plan stable, dont (u, v) est une base orthonormée, dans une base orthonormée de E_n dont les deux premier vecteurs sont u et v, la matrice de ϕ_A est de la forme $B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_2$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-2}$, et A est ORTS à B. Ainsi B vérifie encore la condition (C_3).

    Ainsi, si $X \in E_2$, $\left\| B^T \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| B \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$, ce qui s'écrit encore en utilisant le calcul par bloc $\begin{pmatrix} A_1 X \\ B_1^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 X \\ 0 \end{pmatrix}$ et prouve que $B_1^T X = 0$. Ceci étant vrai quel que soit $X \in E_2$, on en déduit que B_1^T, puis B_1 sont des matrices nulles.

    Reste à prouver que A_1 et A_2 vérifient (C_3), là aussi sans souci.

12. On procède ici par récurrence forte sur la taille n de la matrice : on démontre la proposition $\mathcal{P}_n$: " si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie (C_3), A vérifie (C_4).

    Le cas $n = 1$ est trivial, et le cas $n = 2$ a été démontré à la question 7.

    On considère un entier $n \geq 3$, et on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_k$, $k < n$, vérifiant (C_3) vérifie (C_4). On considère alors une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant (C_3).

    D'après la question précédente, A est ORTS à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$, et $p = 1$ ou 2. Les matrices A_1 et A_2 vérifient encore la condition (C_3), et soit par l'étude des cas en dimension 1 ou 2, soit par hypothèse de récurrence, vérifient la condition (C_4) : il existe $Q_1 \in \mathcal{O}_p$ et $Q_2 \in \mathcal{O}_{n-p}$ telles que les matrices $Q_1 A_1 Q_1^T$ et $Q_2 A_2 Q_2^T$ sont diagonales par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta)$, $r > 0$.

    On vérifie alors que la matrice QAQ^T, avec $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de taille 1×1 ou de la forme $rR(\theta)$, $r > 0$, ce qui achève la récurrence.

13. C'est une conséquence du théorème d'interpolation de Lagrange.

Unicité : la différence deux polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vérifiant chacun $P(z_k) = \overline{z_k}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ possède n racines deux à deux distinctes. C'est donc le polynôme nul, et les deux polynômes sont égaux.

Existence : on vérifie que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} L_k$, où $L_k = \displaystyle\prod_{i \neq k} \frac{X - z_i}{z_k - z_i}$, convient.

Si pour tout k le complexe $\overline{z_k}$ est dans l'ensemble Z, l'expression précédente de P prouve que P est à coefficients réels.

14. Si $\sin(\theta) = 0$, $R(\theta) = \epsilon I_2$, avec $\epsilon = \pm 1$. Comme dans ce cas $P(\epsilon r) = \epsilon r$, $P(rR(\theta)) = P(\epsilon r) I_2 = \epsilon r I_2 = (rR(\theta))^T$.

Sinon, on note χ le polynôme caractéristique de $rR(\theta)$:
$\chi = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = \left(X - re^{i\theta}\right)\left(X - re^{-i\theta}\right)$.

Par le théorème de division euclidienne, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et deux réels a et b tels que $P = \chi \times Q + aX + b$.

On évalue cette relation polynômiale en $X \leftarrow re^{i\theta}$:
$P\left(re^{i\theta}\right) = re^{-i\theta} = are^{i\theta} + b$, ce qui fournit $a = -1$ et $b = 2r\cos(\theta)$.

Ensuite, grâce au théorème de Cayley-Hamilton,
$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = (rR(\theta))^T$.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_4).

A est ORTS à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_lR(\theta_l) \end{pmatrix}$, où $a_1, \ldots, a_k$ sont des réels, $r_1, \ldots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \ldots, \theta_l$ des réels.

Notons $z_1, \ldots, z_m$ l'ensemble des éléments de la liste $[a_1, \ldots, a_k, r_1e^{i\theta_1}, r_1e^{-i\theta_1}, \ldots, r_le^{i\theta_l}, r_le^{-i\theta_l}]$.
Les complexes $z_1, \ldots, z_m$ sont deux à deux distincts, et, d'après la question 13, il existe un polynôme P de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que $P(z_j) = \overline{z_j}$ pour tout $j = 1 \ldots m$. Ainsi $P(a_j) = a_j$ pour tout $j = 1 \ldots k$ et $P\left(r_je^{i\theta_j}\right) = r_je^{-i\theta_j}$ pour tout $j = 1 \ldots m$.

De plus, pour tout $k = 1 \ldots m$, $\overline{z_k} \in \{z_1, \ldots, z_m\}$. Ainsi P est à coefficients réels.

On vérifie alors, par le calcul par blocs et le résultat de la question 14, que $P(B) = B^T$, puis que $P(A) = A^T$.

16. Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons $c_k = \dfrac{r^k\cos(k\theta)}{k!}$ et $s_k = \dfrac{r^k\sin(k\theta)}{k!}$.

Pour tout entier naturel k, $|c_k| \leq \dfrac{r^k}{k!}$ et $|s_k| \leq \dfrac{r^k}{k!}$. Par comparaison à la série exponentielle d'argument r, on en déduit que les deux séries $\sum c_k$ et $\sum s_k$ sont absolument convergentes. On note C et S leurs sommes respectives.

Pour tout k, $c_k + is_k = \dfrac{\left(re^{i\theta}\right)^k}{k!}$, et $C + iS = e^{re^{i\theta}} = e^{r\cos(\theta)}\left(\cos(r\sin(\theta)) + i\sin(r\sin(\theta))\right)$.

Finalement, $C = e^{r\cos(\theta)}.\cos(r\sin(\theta))$ et $S = e^{r\cos(\theta)}.\sin(r\sin(\theta))$.

17. Si $AB = (C_{i,j})$, alors, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n, $C_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$, et

$|C_{i,j}| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |A_{i,k}|\,|B_{k,j}| \leq n\|A\|_\infty.\|B\|_\infty$, ce qui prouve que $\|C\|_\infty \leq n\|A\|_\infty.\|B\|_\infty$.

18. La suite $(S_p(A))$ est une suite à valeurs dans un espace vectoriel de dimension fini, qui converge si et seulement si toutes les suites coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$ (c'est-à-dire les suites $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right)$) convergent.

Or, pour tout (i,j), la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right)$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{k\ ge0} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$, et converge si et seulement si la série converge.

Pour tout k, $\left|(A^k)_{i,j}\right| \leq \|A^k\|_\infty \leq \|A\|_\infty^k$ d'après la question 17 (récurrence sur k...), et par comparaison avec la série exponentielle d'argument $\|A\|_\infty$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente, et la suite $\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right)$ est convergente.

Si maintenant $Q \in \mathcal{O}_n$, et p est un entier naturel,

$$\begin{array}{rcl} S_p(Q^TAQ) & = & \sum_{k=0}^{p} \frac{(Q^TAQ)^k}{k!} \\ & = & \sum_{k=0}^{p} \frac{Q^TA^kQ}{k!} \text{ car } Q^TQ = I_n \\ & = & Q^T\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)Q \\ & = & Q^TS_p(A)Q \\ & \to & Q^T\text{Exp(A)}Q, \end{array}$$

car $M \in \mathcal{M}_n \mapsto Q^TMQ$ est une application linéaire sur un espace de dimension finie, donc est continue. On en déduit que $\text{Exp}(Q^TAQ) = Q^T\text{A}Q$.

19. On montre d'abord que l'application $\Phi\ :\ A \in \mathcal{M}_n \mapsto \|A^TA - AA^T\|$ est continue. En effet si $(A,h) \in \mathcal{M}_n^2$,

$$\begin{array}{rcl} \|\Phi(A+h) - \Phi(A)\|_\infty & = & \|A^Th - hA^T + h^TA - Ah^T + h^Th - hh^T\|_\infty \\ & \leq & \|A^Th\|_\infty + \|hA^T\|_\infty + \|h^TA\|_\infty + \|Ah^T\|_\infty + \|h^Th\|_\infty + \|hh^T\|_\infty \\ & \leq & 4\|A\|_\infty\|h\|_\infty + 2\|h\|_\infty^2 \\ & \to & 0 \text{ quand } h \to 0 \end{array}$$

Comme $\mathcal{E}_n$ est l'image réciproque par Φ du singleton $\{0\}$ de $\mathbb{R}$, c'est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$. Si $A \in \mathcal{E}_n$ et p est un entier naturel, alors $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$. Puisque $\mathcal{E}_n$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n$, la limite de la suite $(S_p(A))$ est encore dans $\mathcal{E}_n$: si A est une matrice normale, $\text{Exp}(A)$ est encore une matrice normale.

20. Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier k, $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc pour tout entier naturel p,

$$\begin{array}{rcl} S_p(rR(\theta)) & = & \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k}{k!}R(k\theta) \\ & = & \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^{p} \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} \end{pmatrix} \\ & \to & \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \\ & = & e^{r\cos(\theta)}R(r\sin(\theta)) \end{array}$$

Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle Q^TAQ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_lR(\theta_l) \end{pmatrix},$$

où $a_1, \ldots, a_k$ sont des réels, $r_1, \ldots, r_l$ des réels strictement positifs, et $\theta_1, \ldots, \theta_l$ des réels.

D'après les règles du calcul par blocs,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}(A) &= Q\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & e^{a_k} & & & \\ & & & \mathrm{Exp}(r_1R(\theta_1)) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \mathrm{Exp}(r_lR(\theta_l)) \end{pmatrix} Q^T \\
&= Q\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & e^{a_k} & & & \\ & & & e^{r_1\cos(\theta_1)}R(r_1\sin(\theta_1)) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & e^{r_l\cos(\theta_l)}R(r_l\sin(\theta_l)) \end{pmatrix} Q^T.
\end{aligned}$$

et $\mathrm{Exp}(A)$ est ORTS à une matrice du type indiqué en question 20.
Réciproquement, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \alpha_1R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \alpha_lR(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels, est l'exponentielle de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & r_1R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & r_lR(\theta_l) \end{pmatrix},$$

où $a_j = \ln(\mu_j)$, $r_j = \sqrt{\ln(\alpha_j)^2 + \beta_j^2}$ et θ_j est un réel vérifiant $\cos(\theta_j) = \dfrac{\ln(\alpha_j)}{r_j}$ et $\sin(\theta_j) = \dfrac{\beta_j}{r_j}$.
Ainsi une matrice ORTS à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \alpha_1R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \alpha_lR(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels est ORTS à une exponentielle de matrice, donc c'est une matrice de $\mathcal{E}_n$.

21. Montrons d'abord qu'une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \alpha_1R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \alpha_lR(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \dots, \beta_l$ des réels, appartient à $\mathcal{F}_n$. La liste des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité d'une telle matrice est $\mu_1, \dots, \mu_k, \alpha_1e^{i\beta_1}, \alpha_1e^{-i\beta_1}, \dots, \alpha_le^{i\beta_l}, \alpha_le^{-i\beta_l}$. Les valeurs propres négatives (qui correspondent à d'éventuels β_j de la forme $(2m+1)\pi$) y sont bien de multiplicité paire.

Enfin si l'on note $S = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \mu_k & & & & & \\ & & & \alpha_1 & & & & \\ & & & & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_l & \\ & & & & & & & \alpha_l \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & R(\beta_l) \end{pmatrix}$,

il est facile de vérifier que $S \in \mathcal{S}_n^{++}$, $T \in \mathcal{SO}_n$, et $B = TS = ST$.

Ensuite, une matrice ORTS à une matrice de $\mathcal{F}_n$ étant dans $\mathcal{F}_n$, on en déduit que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{F}_n$.

Réciproquement, si $B \in \mathcal{F}_n$, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ tels que $B = TS = ST$.

Notons ϕ_S (respectivement ϕ_T) l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à S (respectivement T). On note ensuite $0 < lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ les valeurs propres de S. Puisque S est symétrique réelle, $E_n = \oplus_{k=1}^{p} \ker(S - \lambda_k I_n)$.

Ensuite, comme les matrices S et T commutent, il en est de même de ϕ_S et ϕ_T. En particulier, les sous-espaces propres $\ker(S - \lambda_k I_n)$ de ϕ_S sont stables par ϕ_T, et ϕ_T induit sur chacun de ces sous-espaces une isométrie $\phi_{T,k}$. Pour chaque entier k, il existe donc une base orthonormée de $\ker(S - \lambda_k I_n)$ dans laquelle $\phi_{T,k}$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & R(\theta_l) \end{pmatrix}$,

où $a_1, \ldots, a_k$ sont des réels égaux à 1 ou -1 et $\theta_1, \ldots, \theta_l$ des réels.

Dans une base orthonormée de E_n obtenue par concaténation de ces bases, la matrice de Φ_S est diagonale, et celle de ϕ_T est diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux soit des 1 ou des -1, soit des matrices $R(\theta)$.

Ainsi, il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}_n$, une matrice D diagonale à éléments diagonaux strictement positifs, et une matrice Δ diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux soit des 1 ou des -1, soit des matrices $R(\theta)$ telles que $S = QDQ^T$ et $T = Q\Delta Q^T$.

On en déduit que $B = QD\Delta Q^T$, et B est ORTS à une matrice de la forme

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \mu_k & & & \\ & & & \alpha_1 R(\beta_1) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \alpha_l R(\beta_l) \end{pmatrix},$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_k$ sont des réels, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sont des réels strictement positifs, et $\beta_1, \ldots, \beta_l$ des réels.

Reste à se débarrasser des éventuels réels μ_j négatifs : ce sont des valeurs propres négatives de de B, donc par hypothèse d'ordre de multiplicité pair. Quitte à changer la matrice Q (échanges simultanés de colonnes et de lignes), on peut les supposer successifs dans $\widetilde{B}$, et l'on voit apparaitre des blocs de la forme $|\mu_j| R(\pi)$: $\widetilde{B}$ est du type décrit en question 20, et $B \in \mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

22. Remarques préliminaires : une matrice de $\mathcal{SO}_n$ est un élément de $\mathcal{F}_n$, donc est l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.

Par contre, une matrice de $\mathcal{O}_n \backslash \mathcal{SO}_n$ admet -1 comme valeur propre d'ordre de multiplicité impair, et n'est pas une matrice de $\mathcal{F}_n$

Ici, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. C'est une matrice de $\mathcal{SO}_n$ lorsque n est impair, et une matrice de $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{SO}_n$ lorsque n est pair.

Dans le premier cas, c'est donc bien l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.

Dans le second,ce n'est pas l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.