PSI - Jan. 2023

Correction devoir surveillé n^{o}6

Calculatrices interdites

Probabilité - Séries de fonctions

Exercice 1

1.

a) Sachant $X_n=1$: parmi les 4 points équiprobables à l'instant suivant, il y en a un (et un seul) qui est au bord, donc $\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=B)=1/4}$

Sachant $X_n=2$: parmi les 4 points équiprobables à l'instant suivant, il y en a exactement 2 qui sont au bord, donc $\boxed{\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=B)=2/4=1/2}$

b) Sachant $X_n=1$: parmi les 4 points équiprobables à l'instant suivant, il y a :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{le point O, qui est le seul donnant } X_{n+1}=0\\ \text{2 points donnant } X_{n+1}=2\end{array}\right\} \text{ donc } \boxed{\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=1/4\\ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=2/4\end{array}\right.}$$

c) Les événements $[X_n=0]$, $[X_n=1]$, $[X_n=2]$, $[X_n=B]$ forment un SCE

donc pour tout événement E on a :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(E)\cdot\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{[X_n=1]}(E)\cdot\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{[X_n=2]}(E)\cdot\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}_{[X_n=B]}(E)\cdot\mathbb{P}(X_n=B)$$

donc on cherche les probabilités conditionnelles.

En examinant à chaque fois les 4 points équiprobables on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1\\ \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=B)=0\end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=1/4\\ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=1/2\\ \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=B)=1/4\end{array}\right\}$$

$$\text{et } \left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1/2\\ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=B)=1/2\end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=0)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=1)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=2)=0\\ \mathbb{P}_{(X_n=B)}(X_{n+1}=B)=1\end{array}\right\}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = 0\cdot\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=2)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=B)}$

et $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = 1\cdot\mathbb{P}(X_n=0)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=2)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=B)}$

et $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=2) = 0\cdot\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=2)+0\cdot\mathbb{P}(X_n=B)}$

et $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=B) = 0\cdot\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=2)+1\cdot\mathbb{P}(X_n=B)}$

d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

2.

a) Si on note $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors $4MU = \begin{pmatrix} y \\ 4x+2z \\ 2y \\ y+2z+4t \end{pmatrix}$

- Avec $t=1$ on obtient :

$$MU=U \Leftrightarrow 4MU=4U \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x \\ 4x+2z=4y \\ 2y=4z \\ y+2z+4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x \\ 4x+4x=16x \\ z=2x \\ 4x+4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

donc $\boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- Avec $z=-6+4\sqrt{2}$ et $t=1$ on obtient :

$$MU=\frac{1}{\sqrt{2}}U \Leftrightarrow 4\sqrt{2}MU=4U \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}y=4x \\ 4\sqrt{2}x+2\sqrt{2}(-6+4\sqrt{2})=4y \\ 2\sqrt{2}y=4(-6+4\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}y+2\sqrt{2}(-6+4\sqrt{2})+4\sqrt{2}=4 \end{cases}$$

puis : $L_3 \Leftrightarrow y = \dfrac{4(-6+4\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = 2\left(\dfrac{-6}{\sqrt{2}}+4\right) \Leftrightarrow y = 2\left(-3\sqrt{2}+4\right) \Leftrightarrow y = 8-6\sqrt{2}$

et : $L_4 \Leftrightarrow \sqrt{2}y = 4+12\sqrt{2}-16-4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}y = 8\sqrt{2}-12 \Leftrightarrow L_3$

et en substituant : $L_1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\, 2\left(-3\sqrt{2}+4\right) \Leftrightarrow x = -3+2\sqrt{2}$

et : $L_2 \Leftrightarrow 2x+(-6+4\sqrt{2})=\sqrt{2}y \Leftrightarrow -6+4\sqrt{2}+(-6+4\sqrt{2})=8\sqrt{2}-12 \Leftrightarrow 0=0$

donc $\boxed{U_2 = \begin{pmatrix} -3+2\sqrt{2} \\ 8-6\sqrt{2} \\ -6+4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

➢ Avec $z=-6-4\sqrt{2}$ et $t=1$ on obtient :

$$MU=\frac{-1}{\sqrt{2}}U \Leftrightarrow -4\sqrt{2}MU=4U \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\sqrt{2}y=4x \\ -4\sqrt{2}x-2\sqrt{2}(-6-4\sqrt{2})=4y \\ -2\sqrt{2}y=4(-6-4\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2}y-2\sqrt{2}(-6-4\sqrt{2})-4\sqrt{2}=4 \end{array}\right\}$$

puis : $L_3 \Leftrightarrow y=\dfrac{4(6+4\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y=2\left(3\sqrt{2}+4\right) \Leftrightarrow y=8+6\sqrt{2}$

et : $L_4 \Leftrightarrow -\sqrt{2}y=4-12\sqrt{2}-16+4\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}y=-12-8\sqrt{2} \Leftrightarrow L_3$

et en substituant : $L_1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}2\left(3\sqrt{2}+4\right) \Leftrightarrow x=-3-2\sqrt{2}$

et : $L_2 \Leftrightarrow -2x+6+4\sqrt{2}=\sqrt{2}y \Leftrightarrow 6+4\sqrt{2}+6+4\sqrt{2}=8\sqrt{2}+12 \Leftrightarrow 0=0$

donc $\boxed{U_3 = \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 8+6\sqrt{2} \\ -6-4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$

➢ Enfin, avec $t=1$: $MU=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ 4x+2z=0 \\ 2y=0 \\ y+2z+4=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ 4x-4=0 \\ z=-2 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) M est une matrice carrée d'ordre 4 et M possède 4 VP distinctes, donc par théorème M est diagonalisable.

➢ Plus précisément, si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à M dans la base canonique $\mathscr{B}$, et u_1,u_2,u_3,u_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ associés à U_1,U_2,U_3,U_4 dans la base canonique, et $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ alors on a :

$M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $D=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$

donc d'après la formule de changement de base : $\boxed{M=PDP^{-1}}$

3.

a) $\boxed{V_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0=0) \\ \mathbb{P}(X_0=1) \\ \mathbb{P}(X_0=2) \\ \mathbb{P}(X_0=B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et d'après 4.d) on a : $\forall n\geq 0,\ V_{n+1}=MV_n$

donc par récurrence : $\boxed{\forall n\geq 0,\ V_n=M^nV_0=PD^nP^{-1}V_0}$

b) $PX=V_0 \iff \left\{\begin{array}{c} (-3+2\sqrt{2})x_2-(3+2\sqrt{2})x_3+x_4=1 \\ (8-6\sqrt{2})x_2+(8+6\sqrt{2})x_3=0 \\ (-6+4\sqrt{2})x_2-(6+4\sqrt{2})x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{array}\right.$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2/2 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{c} (-3+2\sqrt{2})x_2-(3+2\sqrt{2})x_3+x_4=1 \\ (4-3\sqrt{2})x_2+(4+3\sqrt{2})x_3=0 \\ -4x_4=-2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (-3+2\sqrt{2})x_2-(3+2\sqrt{2})x_3=1/2 \\ x_2=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}x_3 \\ x_4=1/2 \\ x_1+x_2+x_3=-1/2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} (-3+2\sqrt{2})x_2-(3+2\sqrt{2})x_3=1/2 \\ x_2=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}x_3 \\ x_4=1/2 \\ x_1=-1/2-x_2-x_3 \end{array}\right.$$

c) $PX=V_0 \iff X=P^{-1}V_0$ donc $P^{-1}V_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -(3+2\sqrt{2})/4 \\ -(3-2\sqrt{2})/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

et par récurrence : $\forall n\geq 1,\ D^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $4D^nP^{-1}V_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/\sqrt{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -(3+2\sqrt{2}) \\ -(3-2\sqrt{2}) \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -(3+2\sqrt{2})(1/\sqrt{2})^n \\ -(3-2\sqrt{2})(-1/\sqrt{2})^n \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $4V_n=\begin{pmatrix} 0 & -3+2\sqrt{2} & -3-2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 8-6\sqrt{2} & 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{2} & -6-4\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -(3+2\sqrt{2})(1/\sqrt{2})^n \\ -(3-2\sqrt{2})(-1/\sqrt{2})^n \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{donc}\quad V_n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\left(1/\sqrt{2}\right)^n+(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\left(-1/\sqrt{2}\right)^n\\ 2(3\sqrt{2}-4)(3+2\sqrt{2})\left(1/\sqrt{2}\right)^n+2(4+3\sqrt{2})(2\sqrt{2}-3)\left(-1/\sqrt{2}\right)^n\\ 2(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\left(1/\sqrt{2}\right)^n+2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\left(-1/\sqrt{2}\right)^n\\ 4-(3+2\sqrt{2})\left(1/\sqrt{2}\right)^n-(3-2\sqrt{2})\left(-1/\sqrt{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$\text{donc}\quad \boxed{\forall n\geq 1,\ \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\\ \mathbb{P}(X_n=2)\\ \mathbb{P}(X_n=B)\end{pmatrix}=V_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n\\ 1-\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^n\end{pmatrix}}$$

d) Si $n\geq 1$ alors $2n\geq 2\geq 1$ et $2n-1\geq 1$ donc :

- $\mathbb{P}(X_{2n}=1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=0$
- $\mathbb{P}(X_{2n-1}=2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=0$
- $\boxed{\mathbb{P}(X_{2n-1}=1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2^{n-1}}}$
- $\boxed{\mathbb{P}(X_{2n}=2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\frac{1}{2^n}}$

Exercice 2

Q1 Posons pour tout k de $\mathbb{N}$: $f_k(x) = \frac{x^k \sin(kx)}{k}$. L'application f_k est définie et continue sur $]-1;1[$. Montrons que la convergence de la série est uniforme sur chaque segment, on aura alors f définie et continue sur $]-1;1[$. Soit $x \in [a,b] \subset [-A;A] \subset]-1;1[$:

$$\begin{cases} \left|\frac{x^k \sin(kx)}{k}\right| \leq |A|^k \\ \text{Les suites sont positives} \\ \sum |A|^k \text{ converge car c'est une suite géométrique de raison } |A| < 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison, la série définissant f est absolument convergente sur $]-1;1[$, donc convergente. De plus :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |A|^k = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

En passant au sup pour x dans $[a,b]$:

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème d'encadrement, le reste converge uniformément vers 0 et la fonction f est bien définie et continue sur $]-1;1[$.

Q2 On va utiliser le théorème de dérivation terme à terme. Il faut donc vérifier les hypothèses :

$$\begin{cases} \sum f_k \text{ converge simplement} \\ \sum f_k' \text{ converge uniformément sur chaque segment} \end{cases}$$

La convergence simple de $\sum f_k$ a été démontré dans la question $Q1$. Soit $[a,b]$ un segment de $]-1;1[$ et x, A vérifiant $x \in [a,b] \subset [-A;A] \subset]-1;1[$.

$$|f_k'(x)| = \left|\frac{kx^{k-1}\sin(kx) - kx^k\cos(kx)}{k}\right| \underset{\text{IT}}{\leq} |x|^{k-1}\Big(|\sin(kx)| + |x||\cos(kx)|\Big) \leq 2|A|^{k-1}$$

La série $\sum |A|^{k-1}$ est convergente puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $|A| < 1$. Les séries sont à termes positifs. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum f_k'$ est convergente et son reste R_n vérifie :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k'(x)\right| \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} |A|^{k-1} \leq 2\frac{|A|^n}{1-|A|}$$

On passe ensuite au sup pour x dans $[a,b]$:

$$\|R_n\|_\infty \leq 2\frac{|A|^n}{1-|A|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le reste converge donc uniformément vers 0 et la série $\sum f_k'$ converge uniformément sur tout segment de $[a,b]$. L'application f est dérivable de dérivée :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\sin(kx) - x^k\cos(kx)$$

Q3 Comme $|xe^{ix}| = |x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}e^{ikx} = e^{ix}\sum_{k=1}^{\infty}\left(xe^{ix}\right)^{k-1} \underset{K=k-1}{=} e^{ix}\sum_{K=0}^{\infty}\left(xe^{ix}\right)^K = e^{ix}\frac{1}{1-xe^{ix}}$$

Puis en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué de xe^{ix} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}e^{inx} = e^{ix}\frac{1-xe^{-ix}}{(1-xe^{ix})(1-xe^{-ix})} = \frac{e^{ix}-x}{|1-xe^{ix}|^2}$$

Q4 L'application g est la composée de fonctions dérivables, elle est donc dérivable et :

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)'}{1+\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)^2} = \frac{\frac{(\sin(x)+x\cos(x))(1-x\cos(x))-(-\cos(x)+x\sin(x))x\sin(x)}{(1-x\cos(x))^2}}{1+\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)^2}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $(1-x\cos(x))^2$, on obtient :

$$g'(x) = \frac{\sin(x) - x\sin(x)\cos(x) + x\cos(x) - x^2\cos^2(x) + x\sin(x)\cos(x) - x^2\sin^2(x)}{(1-x\cos(x))^2 + (x\sin(x))^2}$$

Soit encore :

$$g'(x) = \frac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{(1-x\cos(x))^2 + (x\sin(x))^2}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ En utilisant la question $Q2$, la continuité et la linéarité des parties réelle/imaginaire, on trouve :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\sin(kx) + x^k\cos(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}e^{ikx}\right) + x\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}e^{ikx}\right)$$

Puis le résultat de la question $Q3$ donne :

$$f'(x) = \frac{1}{|1-xe^{ix}|^2}(\sin(x) + x(\cos(x) - x)) = \frac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{(1-x\cos(x))^2 + (x\sin(x))^2}$$

On trouve donc $f' = g'$. De plus $f(0) = g(0) = 0$, donc les fonctions f et g sont égales.