Correction devoir surveillé 5

Séries numériques - espaces vectoriels euclidiens - 4h

Exercice 3

Cf cours.

Exercice 1

1. D'après le cours, pour démontrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire, il faut prouver qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, positive et définie.

- Symétrie : soient $(P, Q) \in E^2$.

  On a $(P|Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P(a_j) = (Q|P)$ et $(\,|\,)$ est symétrique.

- Bilinéarité : soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \sum_{j=0}^{n}(\lambda P + Q)(a_j)R(a_j)\\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} P(a_j)R(a_j) + \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)R(a_j)\\ &= \lambda(P|R) + (Q|R)\end{aligned}$$

  ce qui prouve la linéarité à gauche.

  Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $P \in E$, $(P|P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 \geqslant 0$.

- Définition : soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

  Alors $\sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 = 0$ donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $P(a_j) = 0$.

  Il en résulte que P admet $n + 1$ racines distinctes.

  Comme P est de degré au maximum n, il ne peut avoir au maximum que n racines et donc, c'est le polynôme nul.

Conclusion : $\boxed{(\,|\,) \text{ est un produit scalaire sur } E}$

2. Soit $P \in E$.

$$(P|P_0) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)P_0(a_j) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$$

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors $L_j(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$ car $i \neq j$.

En fait, pour tout $i \neq j$, $X - a_i$ est en facteur dans L_j.

Ensuite, pour $i = j$, $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$.

3.2. Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = L_i(a_i)L_j(a_i) + L_i(a_j)L_j(a_j) = 0.$$

Donc la famille $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale.

3.3. Comme $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, elle est libre. Comme Card($\mathscr{B}$) $n + 1 = \dim(E)$, c'est une base de E.

De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$(L_i|L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1.$$

et, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale de } E}$

3.4. Soit $P \in E$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, les composantes de P sont données par :

$$(P|L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_i(a_k) = P(a_i)$$

Ainsi, $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i}$

3.5. On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ car pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_0(a_i) = 1$.

4.

4.1. L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0|P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.

Donc $\boxed{H = \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

4.2. D'après le cours, on a $H = \mathrm{Vect}(P_0)^{\perp}$, donc $\boxed{H^{\perp} = \mathrm{Vect}(P_0)}$

Comme $\dim(H^{\perp}) = 1$, on a $\boxed{\dim(H) = \dim(E) - 1 = n}$

5.1. D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace.

Comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \dfrac{P_0}{\|P_0\|} = \dfrac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de $H^\perp$.

Ainsi, le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ est donné par

$$(Q|R)R = \frac{1}{n+1}(Q|P_0)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$$

soit

$$\boxed{p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)}$$

5.2. Enfin, la distance de Q au sous-espace vectoriel H est égale à la norme du projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$:

$$\mathrm{d}(Q,H) = \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P_0\right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{j=0}^{n} Q(a_j)\right|$$

Exercice 2

Partie 1 : exemples de calcul explicite du reste

1. Question du cours de première année.
2. (a) Les termes de la série $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ sont tous non nuls donc on peut vérifier la convergence par application de la règle de d'Alembert.

   $\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \dfrac{(2n)!}{|x|^{2n}} = \dfrac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 < 1$.

   Ainsi, $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ est une série convergente.

   D'après les séries entières usuelles, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}\,(x)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction ch est de classe C^{2n-1} sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}^{(2n-1)} = \mathrm{sh}$.

   D'après la formule de Taylor reste intégral,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!}\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{ch}\,(x) - \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{\mathrm{ch}^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}.\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\cos$ est de classe C^{2n-1} sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $\cos^{(2n-1)} = (-1)^n \sin$.

D'après la formule de Taylor reste intégral et le DSE usuel de la fonction $\cos$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} &= \cos(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cos(x) - \sum_{i=0}^{2n-2} \frac{\cos^{(i)}(0) x^i}{i!} \\ &= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2} \sin(t)}{(2n-2)!}\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3. (a) Par équivalents simples usuels, $a_n \sim \dfrac{2}{n^3}$ puis $a_n = O(1/n^3)$.

Par comparaison à une série de Riemann (absolument convergente), $\sum a_n$ est une série convergente.

(b) $X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

On pose $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - X + 1$.

$(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $PQ = X^4 + X^2 + 1$ et $P - Q = 2X$.

(c) Fixons $y \in \mathbb{R}_+$ et posons f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \text{Arctan}\, \frac{x-y}{1+xy} - \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(y).$$

Par opérations, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) &= \frac{1}{1 + \dfrac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \times \frac{(1+xy) - y(x-y)}{(1+xy)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+xy)^2 + (x-y)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Par ailleurs, $f(y) = 0$ et $\mathbb{R}_+$ est un intervalle.

Par théorème, f est la fonction nulle, ce qui conclut.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq n$. On calcule :

$$\begin{aligned}a_k &= \text{Arctan}\, \frac{P(k) - Q(k)}{1 + P(k)Q(k)} \\ &= \text{Arctan}\,(P(k)) - \text{Arctan}\,(Q(k)) \quad = \text{Arctan}\,(Q(k+1)) - \text{Arctan}\,(Q(k)). \quad (P(k), Q(k) \text{ sont des réels positifs ou nuls})\end{aligned}$$

Ensuite, on somme en observant que $\text{Arctan}\,(n^2 - n + 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} a_k &= \sum_{k=n}^{\infty} \Big(\text{Arctan}\,(Q(k+1)) - \text{Arctan}\,(Q(k)) \Big) \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,(Q(n)) \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\,(n^2 - n + 1).\end{aligned}$$

(e) Fixons $y>0$. Dans l'égalité

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, \text{Arctan}\,\frac{x-y}{1+xy}=\text{Arctan}\,(x)-\text{Arctan}\,(y)$$

on peut faire tendre x vers $+\infty$ et obtenir par unicité de la limite

$$\text{Arctan}\,\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\,(y).$$

Pour $n\in\mathbb{N}, n^2-n+1>0$ donc $\sum_{k=n}^{\infty}a_k=\text{Arctan}\,\frac{1}{n^2-n+1}$.

Par équivalents simples usuels, $\sum_{k=n}^{\infty}a_k\sim\frac{1}{n^2}$.

Par comparaison de termes généraux positifs, on peut conclure : $\sum\sum_{k=n}^{\infty}a_k$ est une série convergente.

Partie 2 : exemples d'évaluation asymptotique du reste

4. • Soit $x>1$. Posons $y=\dfrac{1+x}{2}$.

   Alors $y>1$ et, par croissance comparée, $\dfrac{\ln(n)}{n^x}=o(1/n^y)$.

   Par comparaison à un exemple de Riemann, on peut conclure : $\sum\frac{\ln(n)}{n^x}$ est une série convergente.

   • Soit $x\leq 1$. On a

   $$\forall n\geq 3, 0\leq\frac{1}{n}\leq\frac{\ln(n)}{n^x}$$

   et par comparaison de termes généraux positifs et divergence de la série harmonique, on peut conclure : $\sum\frac{\ln(n)}{n^x}$ est une série divergente.

5. (a) Soit $a>0$. Tout d'abord, on pose $y=\dfrac{1+x}{2}$ et on a $y>1$ et $\dfrac{\ln(t)}{t^x}\underset{t\to+\infty}{=}o(1/t^y)$.

   Par comparaison à un exemple de Riemann (et continuité de $t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{t^x}$ sur $[a,+\infty[$), $t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{t^x}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.

   Effectuons une intégration par parties en observant que $u:t\mapsto\ln(t)$ et $v:t\mapsto\dfrac{-1}{(x-1)t^{x-1}}$ sont de classe C^1 sur $[a,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_a^x\frac{\ln(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t&=\int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\left[\frac{-\ln(t)}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}\frac{-1}{(x-1)t^x}\,\mathrm{d}t && \text{(au moins deux des trois termes existent car } x>1)\\
&=\frac{\ln(a)}{(x-1)a^{x-1}}+\frac{1}{x-1}\left[\frac{-1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_a^{+\infty} && \text{(croissance comparée et } x-1>0)\\
&=\frac{\ln(a)}{(x-1)a^{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^2a^{x-1}} && (x-1>0)\\
&=\frac{(x-1)\ln(a)+1}{(x-1)^2a^{x-1}}.
\end{aligned}$$

(b) Posons $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^x}$ qui est définie et dérivable sur $[3, +\infty[$. On a

$$\forall t \geq 3, f'(t) = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{x\ln(t)}{t^{x+1}} = \frac{1/x - \ln(t)}{xt^{x+1}}.$$

$0 < 1/x < 1$ et $\forall t \geq 3, \ln(t) > 1$ donc $\forall t \geq 3, f'(t) > 0$ puis f est décroissante sur l'intervalle $[3, +\infty[$.

Soit $k \geq 3$. Par décroissance de f sur $[k, k+1]$ et croissance de l'intégrale, on a

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln(k)}{k^x}.$$

Soit $n \geq 4$.

On somme la première inégalité pour k entre $n-1$ et $+\infty$ pour obtenir

$$r_n \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

On somme la deuxième inégalité pour k entre n et $+\infty$ pour obtenir

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x}\,\mathrm{d}t. \leq r_n \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

ce qui conclut.

(c) D'après les questions précédentes,

$$\frac{(x-1)\ln(n)+1}{(x-1)^2 n^{x-1}} \leq r_n \leq \frac{(x-1)\ln(n-1)+1}{(x-1)^2(n-1)^{x-1}}.$$

Par équivalents simples, les suites majorantes et minorantes sont équivalentes à $\dfrac{(x-1)\ln(n)}{(x-1)^2 n^{x-1}} = \dfrac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}$.

En faisant le quotient par ce dernier terme (qui est strictement positifs) dans l'inégalité précédemment écrite, on obtient un encadrement qui permet d'appliquer le théorème des gendarmes (la suite majorante et la suite minorante convergent vers 1 toutes les deux) et conclure :

$$r_n \sim \frac{\ln(n)}{(x-1)n^{x-1}}.$$

6. (a) Comme le fait l'énoncé dans la question suivante, pour notre contre-exemple, nous présenterons des suites indexées par $\mathbb{N}^*$.

On pose ainsi v et w :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } w_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum v_n$ est une série convergente.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum w_n$ soit une série convergente.

Alors $\sum(w_n - v_n)$ est une série convergente donc $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série convergente : absurde.

Enfin, $1/n = o(1/\sqrt{n}) = o(v_n)$ donc $w_n \sim v_n$.

Ce couple de suites fournit le contre-exemple demandé.

(b) w est déjà définie par l'énoncé (sur $\mathbb{N}^*$). Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\cdot$$

On pose aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}.$$

$\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante positive qui converge vers 0 donc on peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |r_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ puis } v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Ensuite, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

puis par somme (en partie télescopique), $r'_n := \sum_{k=n}^{\infty} w_k = r_n + \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o(1/n)$.

On en déduit que $r'_n \sim \frac{1}{n}$ alors que r_n n'est pas équivalente à $\frac{1}{n}$ car négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Il reste à observer que, comme précédemment, $w_n \sim v_n$ car $\frac{1}{n(n+1)} = o(v_n)$.