Correction devoir surveillé 5 - Version difficile

Séries numériques - espaces vectoriels euclidiens - 4h

Problème

I Vitesse de convergence d'une suite réelle

I.A - Des résultats généraux

I.A.1) Par exemple, la suite $(u_n) = (\frac{1}{2^n})$ appartient à E^c, puisqu'elle converge vers $\ell = 0$, ne vaut jamais 0, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| = \frac{1}{2},$$

donc la suite (u_n^c) est convergente. Ceci montre que l'ensemble E^c est non vide.

I.A.2) Non, E^c n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il ne contient pas la suite nulle (elle converge mais vaut constamment sa limite, donc elle n'est même pas dans E).

I.A.3) Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est dans E (puisqu'elle converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0), mais pas dans E^c. En effet, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k}^c = 1 \neq \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k+1}^c = 0$, ce qui montre que la suite (u_n^c) diverge.
L'ensemble E^c est donc strictement inclus dans E.

I.A.4) Si $(u_n) \in E^c$, alors on a déjà $\ell^c \geq 0$ (en tant que limite d'une suite à termes positifs). Par définition de la limite de la suite (u_n^c) : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow \ell^c - \varepsilon \leq u_n^c \leq \ell^c + \varepsilon$.
Supposons que $\ell^c > 1$. On peut alors choisir $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$ (par exemple $\varepsilon_0 = (\ell^c - 1)/2$), et on aura donc $u_n^c \geq \ell^c - \varepsilon_0 > 1$ à partir d'un certain rang n_0, ce qui se réécrit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_{n+1} - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)|u_n - \ell|.$$

Une récurrence immédiate entraîne alors

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \geq (\ell^c - \varepsilon_0)^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell|,$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = +\infty$ (puisque $\ell^c - \varepsilon_0 > 1$), ce qui est contradictoire avec le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On a donc nécessairement $\ell^c \in [0; 1]$.

I.B - Exemples de calcul de vitesse de convergence

I.B.1)
- La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(u_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc $(u_n) \in E^c$ et $\ell^c = 1$ (convergence lente).

- La suite $(v_n) = (n^k q^n)$ converge vers 0 (par croissances comparées) et ne vaut jamais 0 pour $n \geq 1$, donc $(v_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n^c = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q,$$

donc $(v_n) \in E^c$ et $\ell^c = q \in]0; 1[$ (convergence géométrique de rapport q).

- La suite $(w_n) = (\frac{1}{n!})$ converge vers 0 et ne vaut jamais 0, donc $(w_n) \in E$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n^c = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $(w_n) \in E^c$ et $\ell^c = 0$ (convergence rapide).

I.B.2) a) On a $v_n = e^{2^n \ln\left(1+2^{-n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$, le développement limité $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)$ donne le développement asymptotique suivant :

$$v_n = e^{2^n\left(2^{-n}-\frac{1}{2}(2^{-n})^2+\underset{n\to+\infty}{o}((2^{-n})^2)\right)} = e^{1-\frac{1}{2}2^{-n}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})} = e\times e^{-2^{-n-1}+\underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})}.$$

Enfin, on utilise le développement limité $e^y = 1 + y + \underset{y\to0}{o}(y)$ avec $y = -2^{-n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})$ (qui tend bien vers 0 lorsque $n \to +\infty$) :

$$v_n = e \times \left(1 - 2^{-n-1} + \underset{n\to+\infty}{o}(2^{-n})\right) = e - \frac{e}{2^{n+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

b) La suite (v_n) converge vers $\ell = e$ et ne vaut pas e à partir d'un certain rang, puisque $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2^{n+1}} < 0$, donc $v_n < e$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $(v_n) \in E$. De plus,

$$v_n^c = \frac{|v_{n+1} - e|}{|v_n - e|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e/2^{n+2}}{e/2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

donc (v_n^c) converge vers $\ell^c = \frac{1}{2}$, ce qui montre que (v_n) appartient à E^c, et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport $1/2$.

I.B.3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}$. Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ et on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n}e^{-x} \leq xe^{-x}$ pour tout $(x, n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}^*$.
Puisque $x \mapsto xe^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, elle-même intégrable), on en déduit par le théorème de convergence dominée que $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.
De plus, $I_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car si on avait $I_n = 0$, la continuité et la positivité de f_n sur $[0; +\infty[$ impliqueraient que f_n est identiquement nulle sur $[0; +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Ceci montre bien que $(I_n) \in E$.

b) Soit $X > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^X \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}dx = \left[-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}\right]_0^X + \frac{1}{n}\int_0^X \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

Puisque $\int_0^X \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}dx \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ et $\left[-\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x}\right]_0^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que l'intégrale $\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx$ converge et que

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}dx.$$

On obtient alors par application du théorème de convergence dominée (encore) que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$. En effet, $nI_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$, avec $g_n(x) = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}e^{-x}$, chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$, et $|g_n(x)| \leq e^{-x}$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$, avec la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Finalement, on a l'équivalent $I_n \sim \frac{1}{n}$, qui montre que la suite (I_n) appartient à E^c, et possède une vitesse de convergence lente (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$).

I.B.4) a) Cela résulte d'une comparaison série-intégrale : puisque $t \mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on a

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

En sommant pour k variant de $n+1$ à N, on obtient, pour tous entiers $N > n \geq 1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient bien (puisque $1-\alpha < 0$) l'inégalité voulue :

$$\frac{-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

b) La suite (S_n) est strictement croissante et converge vers ℓ, donc $S_n < \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$. De plus, $S_n^c = \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n}$, donc en utilisant les inégalités précédentes :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq S_n^c \leq 1.$$

Cet encadrement montre que $S_n^c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où (S_n) appartient à E^c et possède une vitesse de convergence lente.

I.C - Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

I.C.1) Puisque $(u_n) \in E$ et la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, il existe une constante $M > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \neq \ell$ et $\dfrac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \leq M$.

On a donc, en multipliant cette inégalité par $|u_n - \ell|^{r-1}$:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq M |u_n - \ell|^{r-1}.$$

Puisque $r-1 > 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell|^{r-1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}-\ell}{u_n - \ell} \right| = 0$ par l'inégalité précédente, ce qui montre que la convergence de (u_n) est rapide.

I.C.2) a) On sait que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge vers e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en évaluant en $x = 1$, on obtient que la suite (S_n) converge vers $s = e$. De plus, la suite (S_n) est strictement croissante, donc on a $S_n \neq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.

Puisque c'est une somme de termes positifs, elle est supérieure à son premier terme, ce qui donne l'inégalité $s - S_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$. De plus, en factorisant par $\frac{1}{(n+1)!}$, on a

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod\limits_{j=2}^{k+1} (n+j)}.$$

Or, $\prod_{j=2}^{k+1}(n+j) \geq \prod_{j=2}^{k+1} 2 = 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{2}{(n+1)!},$$

ce qui montre l'encadrement voulu.

c) Grâce à l'encadrement précédent, on obtient

$$\left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| \leq \frac{2}{n+2},$$

donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{S_{n+1}-s}{S_n-s}\right| = 0$, ce qui montre que la convergence de la suite (S_n) est rapide.

d) Supposons que la convergence de (S_n) soit d'ordre $r > 1$. Il existe alors une constante $M > 0$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r$ pour tout $n \geq n_0$.
Les encadrements précédemment établis impliquent :

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r \leq M\frac{2^r}{((n+1)!)^r},$$

soit

$$\forall n \geq n_0, \qquad ((n+1)!)^{r-1} \leq M2^r(n+2).$$

Mais ceci est impossible car $n+2$ est négligeable devant $((n+1)!)^{r-1}$ (vu que $r-1 > 0$).
Donc la convergence de (S_n) n'est pas d'ordre r.

I.C.3) a) Puisque f est dérivable en ℓ, elle est continue en ℓ. On a donc $(f(u_n))$ qui converge vers $f(l)$ (puisque (u_n) converge vers ℓ). En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (vraie pour tout n), on obtient donc (par unicité de la limite) $\ell = f(\ell)$.

b) Supposons (u_n) non stationnaire.
Tout d'abord, la suite (u_n) est dans E. En effet, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$, alors, puisque $f(\ell) = \ell$, une récurrence immédiate montre que la suite stationne à ℓ à partir du rang n_0, et ceci est contraire à l'hypothèse. On a donc $u_n \neq \ell$ pour tout ℓ, donc $(u_n) \in E$.
En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right| = \left|\frac{f(u_n)-f(\ell)}{u_n-\ell}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f'(\ell)|,$$

(par définition de la dérivabilité de f en ℓ et continuité de la valeur absolue).
Ceci montre que $(u_n) \in E^c$ et que sa vitesse de convergence est $|f'(\ell)|$.

c) Supposons que $|f'(\ell)| > 1$.
Si (u_n) n'est pas stationnaire, la suite (u_n) est dans E^c (d'après la question précédente) et $\ell^c = |f'(\ell)| > 1$. Mais d'après la question **I.A.4**), c'est impossible (ℓ^c doit appartenir à $[0;1]$). Donc la suite (u_n) est nécessairement stationnaire.

d) Puisqu'on suppose ici que (u_n) n'est pas stationnaire, on a nécessairement $(u_n) \in E$ (d'après la question **I.C.3**)b)), donc le quotient $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r}$ est bien défini.
Montrons alors l'équivalence voulue :

- Si $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, r-1\}$, alors la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}|u_n-\ell|^r + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n-\ell|^r\right)\right|}{|u_n-\ell|^r} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|\frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}\right|.$$

  Etant convergente, la suite $\left(\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r}\right)$ est bornée, donc la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r.

- Sinon, l'ensemble $\{k \in \{1, \cdots, r-1\},\ f^{(k)}(\ell) \neq 0\}$ est non vide. En notant j son minimum, la formule de Taylor-Young donne :

$$\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{|f(u_n)-f(\ell)|}{|u_n-\ell|^r} = \frac{\left|\frac{f^{(j)}(\ell)}{j!}|u_n-\ell|^j + \underset{n\to+\infty}{o}\left(|u_n-\ell|^j\right)\right|}{|u_n-\ell|^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{|u_n-\ell|^{r-j}}$$

avec $C > 0$ et $r - j > 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} = +\infty$, et donc la convergence de (u_n) n'est pas d'ordre r.

Exercice 2

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ est convergente de somme e^λ. Pour $x \in \mathbb{R}$ et donc *a fortiori* pour $x > 0$, la quantité $R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série précédente avec $\lambda = nx$: il est donc bien défini. De plus

$$\underline{T_n(x) + R_n(x)} = \sum_{k\geq 0} \frac{(nx)^k}{k!} \underline{= e^{nx}}.$$

(2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliqué entre 0 et x à la fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $f\ : t \mapsto e^{nt}$ s'écrit

$$e^{nx} = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variables $u = x - t$ dans le terme intégral, on en déduit

$$\underline{R_n(x)} = e^{nx} - T_n(x) = \int_x^0 \frac{u^n}{n!} n^{n+1} e^{n(x-u)}\,(-\mathrm{d}u) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{-nu}\mathrm{d}u \underline{= e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u}.$$

(3) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1} n!}{(n+1)! n^{n+1} y^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} y = y \exp\left((n+1)\ln(1+1/n)\right).$$

Or,

$$(n+1)\ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\ln(1+1/n) = 1$ et par continuité de l'exponentielle au point 1, on en déduit que

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye.}$$

Si $y < e^{-1}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et par le critère de d'Alembert que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$.

(4) La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est dérivable de dérivée $u \mapsto (1-u)e^{-u}$. Elle est donc strictement croissante sur $[0,1]$. Pour $x \in]0,1[$, on en déduit que

$$M = \sup_{u\in[0,x]} ue^{-u} = xe^{-x} < 1 \times e^{-1} = e^{-1}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}M^n.$$

D'après la question précédente, et comme $M < e^{-1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n!}M^n = 0$ et donc bien que $\boxed{R_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})}$.
De là, pour $x \in]0,1[$,

$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

(5) Immédiat par récurrence et intégration par parties, et hyper classique !

(6) On a

$$T_n(x) = e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u.$$

Or, et d'après la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu}\,\mathrm{d}u \underset{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n}e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

On en déduit que

$$\underline{T_n(x)} = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u - \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u\right) \underline{= e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u.}$$

(7) Suivons l'indication de l'énoncé en commençant par la justifier : la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. On en déduit que pour $x > 1$ et pour $u \geq x$, on a $ue^{-u} \leq xe^{-x}$. On en déduit que

$$(ue^{-u})^n = (ue^{-u})^{n-1} \times ue^{-u} \leq (xe^{-x})^{n-1} \times ue^{-u}.$$

De là

$$0 \leq T_n(x) \leq e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n-1}\int_x^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n \times \frac{1}{xe^{-x}}\int_x^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Or, comme $x > 1$, $xe^{-x} < 1\times e^{-1} = e^{-1}$, en appliquant à nouveau (3), il vient $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n = 0$ et donc par domination $\lim_{n\to+\infty} T_n(x)e^{-nx} = 0$ et finalement $\boxed{T_n(x) = \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})}$.

(8) La fonction f est dérivable sur $[-1,1]$ et possède un maximum en $0 \in]-1,1[$. On en déduit que $\boxed{f'(0)=0}$.
On a alors, d'après la formule de Taylor-Young en 0 :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et donc

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

puis

$$\underline{\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}}.$$

(9) La fonction φ est continue sur $]-1,1[$ et à valeurs >0 : c'est clair sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ car $f(x) \in]0,1[$ si $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ et c'est aussi clair en 0 puisque $\varphi(0) = 1/2$. Mais comme $]-1,1[$ n'est pas un segment, il faut examiner le comportement de φ lorsque x tend vers 1 et -1 afin de conclure correctement.

- Si $f(-1) > 0$, alors φ se prolonge par continuité en -1 et $\varphi(-1) = -\ln\big(f(-1)\big) > 0$. La fonction φ est alors continue sur le segment $[-1,0]$ et à valeurs >0, elle y possède donc un minimim >0.
- Si $f(-1) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x) = +\infty$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que φ est à valeurs ≥ 2 sur $]-1,-1+\delta]$. Sur le segment $[-1+\delta,0]$, la fonction φ est alors continue et à valeurs >0 donc y possède un minimum $c>0$. On a alors $\varphi \geq \min(2,c) > 0$ sur $[-1,0]$.

Dans les deux cas, φ est minorée sur $]-1,0]$ par un réel >0. Le même raisonnement vaut lorsque x tend vers 1 et donc sur $[0,1[$.
On a bien montré que φ est minorée par un réel >0 sur $]-1,1[$.
Soit $\alpha > 0$ tel que $\varphi(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in]-1,1[$. Alors $\ln\big(f(x)\big) \leq -\alpha x^2$ et par croissance de l'exponentielle,

$$\forall x \in]-1,1[\,, f(x) \leq e^{-\alpha x^2}.$$