2022-2023 **Correction devoir surveillé 3** PSI

Réduction endomorphismes - Intégrales généralisées - 4h

Exercice 1 et 2

Voir le TD

Exercice 4

1 . ◇ Supposons qu'il existe un réel a tel que Φ_a soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Alors $\Phi_a(X^{2n}) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Or $\Phi_a(X^{2n}) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) 2nX^{2n-1} + aX^{2n+1} = (a-2n)X^{2n+1} + \frac{n}{2}X^{2n-1}$.

Donc $a = 2n$.

◇ Si $a = 2n$, alors montrons que Φ_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ et λ et μ deux réels.

$\Phi_\alpha(\lambda P + \mu Q) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P + \mu Q)' + 2nX(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi_a(P) + \mu\Phi_a(Q)$.

Et il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_{2n}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$.

Donc $\Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\sum_{k=1}^{2n} c_k k X^{k-1} + 2nX\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{4}c_k k X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n} c_k k X^{k+1} + 2n\sum_{k=0}^{2n} c_k X^{k+1}$.

Ainsi $\Phi_a(P) = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{4}c_k k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{2n} c_k(2n-k)X^{k+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{4}c_k k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{2n-1} c_k(2n-k)X^{k+1}$.

Donc $\Phi_a(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Ainsi Φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

$\boxed{\text{Ainsi } \Phi_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{2n}[X] \text{ si et seulement si } a = 2n.}$

2 . Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.

◇ Soit α et β deux éléments de $\mathbb{N}$ tel que $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$.

Or $\Phi_{2n}(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left(\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right) + \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} + 2nX\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

Alors $\Phi_{2n}(P) = \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

Comme $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$, alors $\left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta = \lambda\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$

ou encore $\left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta - 2\lambda)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta = 0$.

Donc $(2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta - 2\lambda) = 0$. Ainsi $\alpha + \beta = 2n$ et $\alpha - \beta = 2\lambda$. Alors $\alpha = n + \lambda$ et $\beta = n - \lambda$.

◇ Réciproquement si $\alpha = n+\lambda$ et $\beta = n-\lambda$, alors $\Phi_{2n}\left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta\right) = \frac{\alpha - \beta}{2}\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

$\boxed{\text{Ainsi } P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta \text{ vérifie } \Phi_{2n}(P) = \lambda P \text{ si et seulement si } \alpha = n + \lambda \text{ et } \beta = n - \lambda.}$

3 . D'après la question précédente, pour tout entier λ de $[\![-n,n]\!]$ il existe un polynôme non nul $P = \left(X+\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^{\beta}$ tel que $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$.
Donc λ est une valeur propre de Φ_{2n}.
Ainsi Φ_{2n} est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n}[X]$ de dimension $2n+1$ admettant $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.
Donc les sous espaces de Φ_{2n} sont des espaces vectoriels de dimension 1.

$$\boxed{\text{Ainsi } Sp(\Phi_{2n}) = [\![-n,n]\!] \text{ et } \forall \lambda \in [\![-n,n]\!],\ E_{\lambda}(\Phi_{2n}) = \mathrm{Vect}\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}\right).}$$

4 . Notons A la matrice de Φ_{2n}.
Rappelons que $\Phi_{2n}(1) = 2nX$, $\forall k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $\Phi_{2n}(X^k) = \dfrac{k}{4}X^{k-1} + (2n-k)X^{k+1}$ et $\Phi_{2n}(X^{2n}) = \dfrac{n}{2}X^{2n-1}$.
Donc les coefficients diagonaux de A sont nuls et $Sp(A) = Sp(\Phi_{2n}) = [\![-n,n]\!]$.

Comme tout vecteur non nul de $\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de I_{2n}, les valeurs propres de $A+nI_{2n+1}$ sont les entiers $\lambda+n$ où λ est une valeurs propres de A.
Les coefficients diagonaux de $B = A+nI_{2n+1}$ sont tous égaux à n.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } B \text{ est une matrice de } \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R}) \text{ dont tous les coefficients} \\ \text{diagonaux sont égaux à } n \text{ et dont le spectre est } [\![0, 2n]\!].\end{array}}$$

5 . Remarquons que les valeurs propres de la matrice B^2 sont les entiers $0, 1, 4, 9, \cdots, 4n^2$.
Or B^2 est la matrice de l'endomorphisme $(\phi_{2n} + n\,\mathrm{Id})^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi l'endomorphisme de } E,\ \Psi = (\phi_{2n}+n\,\mathrm{Id})^2 \text{ admet} \\ 0, 1, 4, 9, \cdots, 4n^2 \text{ comme valeurs propres.}\end{array}}$$

Exercice 5

Q1.

1.a) Un calcul sans mystère révèle que $\mathrm{U}^2 = \mathrm{V}^2 = \mathrm{I}_4$, donc $u^2 = v^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. De même, on vérifie que

$$\mathrm{UV} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\mathrm{VU}.$$

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des symétries et } uv = -vu.}$$

1.b) On a immédiatement

$$\boxed{\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} \mathrm{U} = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr} v = \operatorname{tr} \mathrm{V} = 0.}$$

Or, u est diagonalisable et $\operatorname{Sp} u \subset \{-1, 1\}$; de plus, la trace de u est égale à la somme des valeurs propres, prises avec leur multiplicité ; ainsi, la multiplicité de 1 et de -1 sont toutes deux égales à 2. Puisque u est diagonalisable, ces multiplicités sont égales aux dimensions des sous-espaces propres :

$$\boxed{\dim \mathrm{E}_1(u) = \dim \mathrm{E}_{-1}(u) = 2.}$$

Le même constat s'impose évidemment pour v.

$$\boxed{\dim \mathrm{E}_1(v) = \dim \mathrm{E}_{-1}(v) = 2.}$$

1.c) Résoudre le système
$$(\mathrm{U}-\mathrm{I}_4)\mathrm{X}=0$$
permet d'obtenir, par exemple, des vecteurs
$$\mathrm{E}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathrm{E}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$
$$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{E}_1(u) \text{ est } (e_1,e_2) \text{ avec } e_1=3b_1-2b_3+b_4 \text{ et } e_2=b_2.}$$
Posons $e_3=v(e_1)$ et $e_4=v(e_2)$, alors on a
$$u(e_3)=uv(e_1)=-vu(e_1)=-v(e_1)=-e_3$$
et de même
$$u(e_4)=uv(e_2)=-vu(e_2)=-v(e_2)=-e_4.$$
Un calcul direct est également possible, en calculant explicitement
$$\mathrm{E}_3=\mathrm{VE}_1\qquad\text{et}\qquad\mathrm{E}_4=\mathrm{VE}_2.$$
La famille (e_3,e_4) est libre, car image par un isomorphisme d'une famille libre ; elle est de cardinal 2 donc
$$\boxed{(e_3,e_4) \text{ est une base de } \mathrm{E}_{-1}(u).}$$
Puisque $\mathrm{E}_1(u)$ et $\mathrm{E}_{-1}(u)$ sont en somme directe, la famille $\mathcal{E}$ est libre et, par cardinalité,
$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est une base de E.}}$$
Enfin, il reste à calculer $v(e_3)=v^2(e_1)=e_1$ et $v(e_4)=v^2(e_2)=e_2$ pour conclure que
$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{E}}(u)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.}$$

Q2. En prenant la trace de la relation $uv+vu=0$ et en se souvenant que $\operatorname{tr}(uv)=\operatorname{tr}(vu)$, on obtient $2\operatorname{tr}(uv)=0$, donc
$$\boxed{\operatorname{tr}(uv)=0.}$$

Q3. On écrit successivement
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}u&=\operatorname{tr}(uv^2) && v^2=\mathrm{id}\\&=\operatorname{tr}(vuv)=-\operatorname{tr}(uvv) && uv=-vu\\&=-\operatorname{tr}(u) && v^2=\mathrm{id}\end{aligned}$$
donc
$$\boxed{\operatorname{tr}u=0.}$$
Les rôles de u et v étant symétriques, on a également
$$\boxed{\operatorname{tr}v=0.}$$

Q4. On peut procéder par analyse-synthèse. Soit $x\in\mathrm{E}$.

Analyse

Supposons qu'il existe $a\in\mathrm{E}_1(u)$ et $b\in\mathrm{E}_{-1}(u)$ tels que $x=a+b$. Alors $s(x)=a-b$, ce qui montre que

$$a = \frac{x+s(x)}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{x-s(x)}{2}.$$

Synthèse

Posons $a = \dfrac{x+s(x)}{2}$ et $b = \dfrac{x-s(x)}{2}$. Alors $a+b=x$ et l'on vérifie rapidement que $s(a)=a$ tandis que $s(b)=-b$, ce qui prouve que $a \in \mathrm{E}_1(u)$ et $b \in \mathrm{E}_{-1}(u)$.

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \oplus \mathrm{E}_{-1}(u) \text{ et tout } x \text{ vecteur de E se décompose en } x = \underbrace{\frac{x+u(x)}{2}}_{\in \mathrm{E}_1(u)} + \underbrace{\frac{x-u(x)}{2}}_{\in \mathrm{E}_{-1}(u)}.}$$

Q5. Dans une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice représentative de u est de la forme

$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_\ell \end{array}\right)$$

où k et ℓ sont les dimensions respectives de $\mathrm{E}_1(u)$ et $\mathrm{E}_{-1}(u)$. La trace de u est donc égale à $k-\ell$; or elle est nulle, donc $\ell = k$ et la dimension de E est $n = 2k$.

$$\boxed{\text{La dimension de E est paire.}}$$

Q6. ❏ **Soit $\boldsymbol{x \in \mathrm{E}_1(u)}$.** Alors $u(x) = x$ et

$$v(x) = vu^2(x) = -uvu(x) = -u\big(v(x)\big)$$

ce qui montre que $v(x) \in \mathrm{E}_{-1}(u)$. ❏

Ceci prouve que $v\big(\mathrm{E}_1(u)\big) \subset \mathrm{E}_{-1}(u)$. Or, v étant un automorphisme, la dimension de $v\big(\mathrm{E}_1(u)\big)$ est égale à celle de $\mathrm{E}_1(u)$, elle-même égale à celle de $\mathrm{E}_{-1}(u)$. Ainsi

$$\boxed{v\big(\mathrm{E}_1(u)\big) = \mathrm{E}_{-1}(u).}$$

Le même raisonnement permet d'achever la question :
❏ **Soit $\boldsymbol{x \in \mathrm{E}_{-1}(u)}$.** Alors $u(x) = -x$ et

$$v(x) = vu^2(x) = -uvu(x) = u\big(v(x)\big)$$

ce qui montre que $v(x) \in \mathrm{E}_1(u)$. ❏

Ceci prouve que $v\big(\mathrm{E}_{-1}(u)\big) \subset \mathrm{E}_1(u)$ et, par égalité des dimensions :

$$\boxed{v\big(\mathrm{E}_1(u)\big) = \mathrm{E}_{-1}(u).}$$

Q7. On choisit une base $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $\mathrm{E}_1(u)$. Notons

$$e_{k+1} = v(e_1) \qquad e_{k+2} = v(e_2) \qquad \cdots \qquad e_{2k} = v(e_k).$$

L'image d'une famille libre par un automorphisme (ici, v) étant libre, on en déduit que $(e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{2k})$ est une base de $\mathrm{E}_{-1}(u)$. Posons alors $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{2k})$: c'est une base de E. Puisque $e_1, \ldots, e_k$ sont dans $\mathrm{E}_1(u)$ et que $e_{k+1}, \ldots, e_{2k}$ sont dans $\mathrm{E}_{-1}(u)$, on a déjà

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_k \end{array}\right).}$$

De plus, on a

$$v(e_{k+1}) = v^2(e_1) = e_1 \qquad v(e_{2k}) = v^2(e_k) = e_k$$

ce qui montre que

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(v) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_k \\ \hline \mathrm{I}_k & 0 \end{array}\right).}$$

Partie I

1.(a) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, on a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ et on en déduit la continuité de g sur $\mathbb{R}$. Par dérivation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad g'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

Avec les développements usuels, on trouve

$$g'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t(1+\mathrm{o}(t)) - t + \mathrm{o}(t^2)}{t^2} = \mathrm{o}(1) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$, on conclut

$$\boxed{g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

1.(b).i Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto 1-\cos t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to 0}{=} \frac{1-1+\mathrm{o}(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos t}{t} \underset{t\to +\infty}{=} \frac{\mathrm{O}(1)}{t} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$$

Le crochet $\left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}$ étant fini, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Soit $f : t > 0 \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1-1+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

1.(b).ii Soit j entier non nul. Avec le changement de variables $u = jt$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

1.(c) On a $\quad \ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^4}{5!} + \mathrm{o}(t^4)\right) = -\dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^4}{5!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{t^4}{(3!)^2} + \mathrm{o}(t^4)$

D'où

$$\boxed{\ln g(t) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + \mathrm{o}(t^4)}$$

1.(d) Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $u = \sqrt{\dfrac{n}{3}}t$, il vient

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{n}}\int_0^{\sqrt{3}\ln n} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

Or, on a $$\int_0^{\sqrt{3}\ln n} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit $$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}\ln n} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$

2.(a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^n t}{t^n}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^n}{t^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

On en déduit l'intégrabilité de la fonction sur $]\,0\,;1\,]$ puisqu'elle prolongeable par continuité en 0 et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2.(b) D'après l'intégration par parties effectuée à la question 1.(b).i, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par trigonométrie, on a $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \dfrac{t}{2}$, les intégrales $2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

3.(a) Soit n entier non nul et $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_n(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^n = \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}(-1)^{n-\ell}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\ell-n)t}$$

La fonction h_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_n^{(k)}(t) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}(-1)^{n-\ell}(2\ell-n)^k(\mathrm{i})^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\ell-n)t}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\,|2\ell-n|^k$$

Ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!], \text{ il existe } \mathrm{K} > 0 \text{ tel que, pour } t \text{ réel, on a } \left|h_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \mathrm{K}.}$$

Remarque : Le sujet d'origine indique pour $t > 0$ dans la définition de h_n puis considère la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui ne pose pas de problème de toute façon.

Variante : On aurait aussi pu justifier que $h_n^{(k)}$ est 2π-périodique comme dérivée d'une telle fonction, continue donc bornée sur une période et par conséquent bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

3.(b).i Soit n entier non nul. On a

$$h_n(t) \underset{t\to 0}{=} (t+\text{o}(t))^n = (t(1+\text{o}(1))^n = t^n(1+\text{o}(1))^n \quad \text{avec} \quad (1+\text{o}(1))^n \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

D'où

$$\boxed{h_n(t) = t^n + \text{o}(t^n)}$$

3.(b).ii Soit n entier non nul et $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Par dérivation d'un développement limité, il vient

$$h_n^{(k)}(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} + \text{o}(t^{n-k})$$

D'où

$$\boxed{\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3.(c) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0\,;\, n-2]\!]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$, prolongeable par continuité en 0 et, d'après la majoration établie à la question 3.(a)

$$\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t\to +\infty}{=} \text{O}\left(\frac{1}{t^{n-k}}\right)$$

La fonction est donc intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ (faussement impropre) et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2 \text{ et } k \in [\![0\,;\, n-2]\!], \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\text{d}t \text{ converge absolument.}}$$

3.(d) Soit $n \geqslant 2$. Les fonctions $t \mapsto h_n^{(n-2)}(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. D'après le résultat de la question 3.(b).ii, on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{n!}{2} t^2$ et d'après le résultat de la question 3.(a), on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t\to +\infty}{=} \text{O}(1)$. Ainsi

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{2} t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t\to +\infty}{=} \text{O}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\text{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\text{d}t$$

sont de même nature. La fonction $t \mapsto \dfrac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{n!}{2} \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \underset{t\to +\infty}{=} \text{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On en déduit son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$ car prolongeable par continuité en 0 et sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\text{d}t \text{ converge.}}$$

L'intégration par parties mise en œuvre donne l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec des intégrations par parties successives, on peut conjecturer que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. On a clairement $\mathscr{P}(0)$ vraie. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \in [\![0\,;n-2]\!]$. Ceci suppose l'intégrale à droite dans l'égalité convergente. Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{(n-k-1)t^{n-k-1}}$ et $h_n^{(k)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)}\frac{t^{n-k}}{t^{n-k-1}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

et

$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[-\dfrac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}}\right]_0^{+\infty}$ est fini, nul et on a

$$\begin{aligned}\frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!}\,\frac{1}{n-k-1}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(n-1-(k+1))!}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-(k+1)}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Avec $k = n-1$, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

4.(a) Soit n entier non nul. Pour t réel, on a

$$h_{2n}(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n} = \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-k)t} = \frac{1}{4^n(-1)^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}$$

En observant $(-1)^n = (-1)^{-n}$, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}}$$

4.(b) Soit n entier non nul. Par dérivation, on a pour t réel

$$\begin{aligned}h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}(2n-2k)^{2n-1}(\mathrm{i})^{2n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^{n+k}(n-k)^{2n-1}(-1)^n(-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}\end{aligned}$$

Comme la fonction $h_{2n}^{(2n-1)}$ est réelle, il vient en prenant la partie réelle dans le membre de gauche

$$h_{2n}(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k(n-k)^{2n-1}\sin(2(n-k)t)$$

On observe que le terme en $k=n$ est nul et on sépare cette somme en deux : pour $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ et pour $k \in [\![n+1\,;\,2n]\!]$. Dans la première somme, on fait le changement d'indice $\ell = n-k$ et dans la deuxième $\ell = k-n$. On obtient

$$2h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{2n}{n-\ell}(-1)^{n-\ell}\ell^{2n-1}\sin(2\ell t) + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{2n}{\ell+n}(-1)^{n+\ell}(-\ell)^{2n-1}\sin(-2\ell t)$$

On observe $\quad \forall \ell \in [\![1\,;\,n]\!] \qquad \binom{2n}{n-\ell} = \binom{2n}{2n-(n-\ell)} = \binom{2n}{n+\ell} \qquad (-1)^{n-\ell} = (-1)^{n+\ell}$

et avec l'imparité du sin, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\sin(2\ell t)}$$

4.(c) Par linéarité de l'intégrale, toutes les intégrales concernées étant convergentes d'après le résutlat de la question 1.(b).ii, on a pour n entier non nul

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\frac{\sin(2\ell t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} &= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2\ell t)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Et on conclut $\qquad \boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{n+\ell}\binom{2n}{\ell+n}\ell^{2n-1}}$

5.(a) Pour $n \geqslant 2$, on a $\qquad \forall t \geqslant \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leqslant \frac{|\sin t|^n}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n}$ converge, il vient par comparaison et inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin t|^n}{t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n} \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On conclut $\qquad \boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

5.(b).i On pose $\qquad \forall t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$

La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve

$$\forall t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad \varphi'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

On pose $\qquad \forall t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad \psi(t) = t\cos t - \sin t$

On a ψ dérivable et par dérivation

$$\forall t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \qquad \psi'(t) = -t\sin t \leqslant 0$$

Comme $\psi(0) = 0$, on en déduit ψ négative et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ décroît.}}$$

5.(b).ii Soit n entier non nul. On note $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Par décroissance de φ, il vient

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(\varepsilon_n)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)\varphi^n(\varepsilon_n)$$

Puis $$\ln \varphi^n(\varepsilon_n) = n \ln g(\varepsilon_n) = -\frac{n\varepsilon_n^2}{6} + \mathrm{o}(n\varepsilon_n^2) = -\frac{(\ln n)^2}{6} + \mathrm{o}((\ln n)^2)$$

d'où $$\underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)}_{=\mathrm{O}(1)} \varphi^n(\varepsilon_n) = \mathrm{O}(1) \exp \underbrace{\left[\frac{\ln n}{2} - \frac{(\ln n)^2}{6} + \mathrm{o}((\ln n)^2)\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$\boxed{\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

5.(c).i La fonction $h : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $|h'(u)| = \mathrm{e}^{-u} \leqslant 1$ pour $u \geqslant 0$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall u \geqslant 0 \qquad |h(u) - h(0)| \leqslant 1\,|u - 0|$$

Autrement dit $$\boxed{\forall u \geqslant 0 \qquad |\mathrm{e}^{-u} - 1| \leqslant u}$$

Remarque : La question est étrangement mal posée. N'importe quel $a > 0$ fait l'affaire et on peut faire mieux que l'inégalité exigée en se passant du facteur 2.

5.(c).ii On pose $$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad h(t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6}$$

On a obtenu précédemment

$$h(t) = -\frac{t^4}{180} + \mathrm{o}(t^4) = t^4 \underbrace{\left(-\frac{1}{180} + \mathrm{o}(1)\right)}_{\xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{1}{180} < 0}$$

On en déduit que h est négative au voisinage de 0. Par ailleurs, on a $-\dfrac{t^4}{180} \geqslant -t^3$ au voisinage de zéro puisque $t^4 \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(t^3)$. Par conséquent, pour un choix de voisinage de zéro suffisamment petit, les deux conditions mentionnées sont réalisées autrement dit

$$\boxed{\text{On dispose de } b > 0 \text{ tel que pour } t \in \left]0\,;b\right], \text{ on a } -t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0.}$$

5.(c).iii On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \in \left]0\,;b\right]$ et donc $-t^3 \leqslant h(t) \leqslant 0$ pour $t \in \left]0\,;\varepsilon_n\right]$. On obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\varepsilon_n} \left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\right] \mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{\varepsilon_n} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}} \left[\mathrm{e}^{nh(t)} - 1\right] \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^{\varepsilon_n} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}}_{\leqslant 1} \left(1 - \mathrm{e}^{nh(t)}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\varepsilon_n} \left(1 - \mathrm{e}^{-nt^3}\right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Avec la majoration de la question 5.(c).i (avec le facteur 2), il vient

$$\boxed{\left|\int_0^{\varepsilon_n}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t-\int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{\varepsilon_n}2nt^3\,\mathrm{d}t\leqslant 2n(\varepsilon_n)^3\varepsilon_n\leqslant\frac{2(\ln n)^4}{n}}$$

Remarque : Là encore, il est aisé de faire mieux que ce qu'exige le sujet :

$$\left|\int_0^{\varepsilon_n}\left[\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n-\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\right]\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{\varepsilon_n}nt^3\,\mathrm{d}t=\frac{n\varepsilon_n^4}{4}=\frac{(\ln n)^4}{4n}$$

Compte-tenu de ce qui suit, on aurait pu aussi se contenter d'intégrer la relation de comparaison $1-\mathrm{e}^{-nt^3}\underset{t\to 0}{\sim}nt^3$ sur $]\,0\,;\varepsilon_n\,]$. En effet, on a

$$\int_0^{\varepsilon_n}\left(1-\mathrm{e}^{-nt^3}\right)\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_0^{\varepsilon_n}nt^3\,\mathrm{d}t=\frac{n\varepsilon_n^4}{4}=\frac{(\ln n)^4}{4n}$$

ce qui suffit pour conclure à la question suivante.

5.(c).iv Soit n entier non nul. Par relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\varepsilon_n}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t+\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{2(\ln n)^4}{n}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, d'après les résultats intermédiaires précédemment établis, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{=}\int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et
$$\int_0^{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{3\pi}{2n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$