2022-2023 | PSI

Correction devoir surveillé 2

Algèbre linéaire 4h

Exercice 1

Cf cours.

Exercice 2

1. Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, il existe $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in \prod_{j=1}^{m} E_j$ tel que : $\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} \vec{x}_j$. Avant de parler de projecteurs, notons d'abord que si l'on applique u à cette égalité, on a par linéarité : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} u(\vec{x}_j)$ et comme $\vec{x}_j$ appartient au sous-espace propre de u associé à λ_j, et ce pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, et donc : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{x}_j$. Par une récurrence facile :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \vec{x}_j. \tag{1}$$
Soit $j \in [\![1, m]\!]$. Par définition, $\vec{x}_j$ est la projection de $\vec{x}$ sur E_j parallèlement à $F_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} E_i$. Par conséquent, si l'on définit p_j comme le projecteur sur E_j parallèlement à F_j, alors l'égalité (1) peut se réécrire :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j(\vec{x}). \tag{$*$}$$
Ainsi les p_j sont des projecteurs, non nuls car leurs images sont les E_j (qui sont des sous-espaces propres, donc non réduits à $\{\vec{0}\}$), et d'après $(*)$ on a : $u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j$. D'où le résultat.

2. (2.1) L'égalité $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$ est vraie pour tout P de la forme $P = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'après $(*)$, et comme la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{C}[X]$ on en déduit, par linéarité, que l'égalité est vraie pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

Les familles génératrices *infinies* ne sont pas au programme de PSI, donc si l'on ne veut pas se permettre ce petit écart on traite cette question en écrivant $P \in \mathbb{C}[X]$ sous la forme : $P = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell X^\ell$, de sorte que : $P(u) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell u^\ell$. On a alors le résultat en utilisant $(*)$ pour exprimer u^ℓ en fonction des p_j :

$$P(u) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell u^\ell = P(u) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^\ell p_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\ell=0}^{d} a_\ell \lambda_j^\ell \right) p_j = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j.$$

(2.2) D'après le critère polynomial de diagonalisation, u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé et à racines simples. Or, d'après la question précédente, pour trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$, il suffit d'avoir : $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $P(\lambda_j) = 0$.

Un polynôme vérifiant cette condition est : $P = \prod_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$. En effet, toutes ses racines sont exactement les λ_j, donc $P(\lambda_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, et d'après l'égalité de la question précédente on a : $P(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Ceci montre que P est un polynôme annulateur de u, mais encore faut-il s'assurer qu'il est scindé et à racines simples : il est évidemment scindé par définition, et il est à racines simples que ses facteurs $X - \lambda_j$ sont tous distincts ; en effet, les λ_j sont supposés tous différents, d'où le résultat.

Ainsi u admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples, donc d'après le critère polynomial de diagonalisation : u est diagonalisable.

(2.3)

2.3.1. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$. Si $i = j$, alors : $L_j(\lambda_i) = L_j(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \dfrac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} 1 = 1$ Si $i \neq j$, alors on constate que dans le produit $L_j(\lambda_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \dfrac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$, le facteur correspondant à $k = i$ (choix possible car $i \neq j$) est égal à $\frac{\lambda_i - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_k} = 0$, donc : $L_j(\lambda_i) = 0$.

En résumé, on a montré que pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$:

$$L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

2.3.2. Montrons d'abord que la famille $\mathscr{B}$, qui est bien constituée de polynômes de degré $m - 1$ (et donc dans $\mathbb{C}_{m-1}[X]$), est une famille libre : soit $(\alpha_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ tel que : $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, évaluer cette égalité en λ_i donne : $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j(\lambda_i) = 0$. Or, d'après la question précédente :

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j(\lambda_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1} = \alpha_i,$$

et donc l'égalité $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j(\lambda_i) = 0$ équivaut à : $\alpha_i = 0$. C'est vrai pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, ce qui prouve que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Comme, de plus, elle est cardinal $m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$, c'est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$: d'où le résultat.

2.3.3. Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$, il existe $(\alpha_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ tel que : $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j L_j$. Déterminer les coordonnées de P dans cette base revient à déterminer les α_j.

Pour trouver la valeur de α_i pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, il suffit d'évaluer cette égalité en un nombre complexe qui « élimine » tous les termes de la somme du membre de droite, sauf celui qui correspond à $j = i$ (afin d'isoler α_i). Nous y parvenons par une évaluation en λ_i. On a alors :

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \quad P(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j(\lambda_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \alpha_j \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} + \alpha_i \underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1} = \alpha_i,$$

donc : $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\alpha_i = P(\lambda_i)$. On a montré : $P = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j) L_j$.

(2.4) Soit $j \in [\![1,m]\!]$. Posons $P = L_j$ dans l'identité de la question 2.1. On a alors :

$$L_j(u) = \sum_{i=1}^{m} L_j(\lambda_i) p_i = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \underbrace{L_j(\lambda_i)}_{=0} p_i + \underbrace{L_j(\lambda_j)}_{=1} p_j = p_j,$$

d'où le résultat.

(2.5) On nous demande de montrer : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_j \mid j \in [\![1,m]\!]\}$.

Montrons d'abord que les valeurs propres de u sont *parmi* les λ_j : soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et notons $\vec{x}$ un vecteur propre de u associé à λ. Comme on l'a vu dans la question 2.2, si l'on pose $P = \prod\limits_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$, alors $P(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc : $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$. Mais, si l'on développe P ainsi : $P = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$, on voit qu'on a aussi :

$$P(u)(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda^i \vec{x} = P(\lambda)\vec{x},$$

l'égalité $u^i(\vec{x}) = \lambda^i \vec{x}$ se démontrant aisément par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. On a donc à la fois $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ et $P(u)(\vec{x}) = P(\lambda)\vec{x}$, ce qui implique : $P(\lambda)\vec{x} = \vec{0}$. Comme $\vec{x} \neq \vec{0}$ en tant que vecteur propre, il reste : $P(\lambda) = 0$. Or les racines de P sont exactement les λ_i, donc $\lambda \in \{\lambda_j \mid j \in [\![1,m]\!]\}$. On a montré une première inclusion : $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{\lambda_j \mid j \in [\![1,m]\!]\}$.

Montrer l'inclusion réciproque : $\{\lambda_j \mid j \in [\![1,m]\!]\} \subseteq \mathrm{Sp}(u)$, revient à démontrer que les λ_j sont des valeurs propres de u. Soit $j \in [\![1,m]\!]$. Pour montrer que λ_j est une valeur propre de u, je vais expliciter un vecteur $\vec{x}_j \in E$ non nul tel que $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$. Pour en trouver un, je vais m'inspirer de ce qui fut observé dans la question 1 : dans cette question, λ_j était effectivement une valeur propre de u, et son sous-espace propre associé était l'image du projecteur p_j. Si tout se passe bien, ce devrait rester vrai ici même si l'on n'est plus tout à fait dans les hypothèses de la question 1 (mais presque : la différence est la connaissance du spectre).

C'est ce qui motive le raisonnement qui suit : soit $\vec{x}_j \in \mathrm{im}(p_j) \setminus \{\vec{0}\}$ (par hypothèse de l'énoncé p_j n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe bien un tel vecteur). Il existe donc $\vec{y}_j \in E$ tel que : $\vec{x}_j = p_j(\vec{y}_j) = L_j(u)(\vec{y}_j)$. Montrons : $u(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$. Pour cela, on note que d'après $(*)$, et la question précédente, on a :

$$u(\vec{x}_j) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i(\vec{x}_j) \overset{(q.\,2.4)}{=} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i(u)(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i(u)(L_j(u)(\vec{y}_j)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L_i(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j).$$

Or il s'avère que pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, on a : $L_i(u) \circ L_j(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ si $i \neq j$, et : $L_i(u) \circ L_j(u) = L_j(u)$ si $i = j$ (ce qui montre en passant que $L_i(u)$ est un projecteur).

Admettons-le *provisoirement* : je le démontrerai plus bas. Si ce fait est établi, alors l'égalité ci-dessus implique :

$$u(\vec{x}_j) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \lambda_i \underbrace{L_i(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j)}_{=\vec{0}} + \lambda_j \underbrace{L_j(u) \circ L_j(u)(\vec{y}_j)}_{=L_j(u)(\vec{y}_j)} = \lambda_j L_j(u)(\vec{y}_j) = \lambda_j \vec{x}_j,$$

et comme $\vec{x}_j \neq \vec{0}$ cela prouve que λ_j est une valeur propre de u, un vecteur propre associé étant $\vec{x}_j$ (on pourrait montrer, mais ce n'est pas exigé, qu'en fait le sous-espace propre associé est exactement $\mathrm{im}(p_j)$).

On a donc montré $\{\lambda_j \mid j \in [\![1, m]\!]\} \subseteq \mathrm{Sp}(u)$, l'autre inclusion ayant été établie au début de la question. D'où le résultat demandé :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_j \mid j \in [\![1, m]\!]\}.$$

Démontrons à présent le résultat qui fut admis provisoirement, à savoir :

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!]^2, \quad L_i(u) \circ L_j(u) = \begin{cases} 0_{\mathrm{L}(E)} & \text{si} \quad i \neq j, \\ L_j(u) & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$. Supposons d'abord que i et j sont distincts. Au vu de la définition des L_j, il est évident que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, le polynôme $X - \lambda_k$ divise soit L_i (si $i \neq k$), soit L_j (si $j \neq k$), donc en tous les cas il divise $L_i \cdot L_j$. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $L_i \cdot L_j = \prod\limits_{k=1}^{m} (X - \lambda_k) \cdot Q$. En évaluant en u, on obtient : $L_i(u) \circ L_j(u) = \prod\limits_{k=1}^{m} (u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) \circ Q(u)$. Or, comme on l'a rappelé au début du traitement de cette question, on a : $\prod\limits_{k=1}^{m} (u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}$.
On en déduit l'égalité voulue dans le cas où i et j sont distincts : $L_i(u) \circ L_j(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$.
Supposons à présent $i = j$. On note que l'égalité $(*)$ donne, quand $k = 0$: $\mathrm{Id}_E = \sum\limits_{\ell=1}^{m} p_\ell = \sum\limits_{\ell=1}^{m} L_\ell(u)$. En composant à gauche chaque membre de l'égalité par $L_j(u)$, on a alors :

$$L_j(u) = L_j(u) \circ \left(\sum_{\ell=1}^{m} L_\ell(u) \right) = \sum_{\ell=1}^{m} L_j(u) \circ L_\ell(u) = \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{m} L_j(u) \circ L_\ell(u) + L_j(u) \circ L_j(u),$$

et d'après ce qu'on vient de démontrer on a $L_j(u) \circ L_\ell(u) = 0_{\mathrm{L}(E)}$ dès que $\ell \neq j$. On en déduit : $L_j(u) = L_j(u) \circ L_j(u)$, d'où le résultat. Ceci achève de démontrer le résultat qui fut admis ci-dessus.

Q20. Puisque x est un vecteur propre de $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ associé à la valeur propre λ, on a : $\lambda x = Ax$. Comparer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième ligne de chaque membre de cette égalité matricielle donne bien :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j. \tag{4}$$

Q21. On reprend l'égalité de la question précédente avec $i = i_0$. On obtient, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $|x_j| \leqslant |x_{i_0}|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|,$$

or $|x_{i_0}| > 0$ (sinon, toutes les coordonnées du vecteur x étant inférieures ou égales à x_{i_0} en valeur absolue, on aurait : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, ce qui est impossible puisqu'un vecteur propre est non nul), donc en divisant par $|x_{i_0}|$ on obtient :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

On a bien sûr $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$, donc :

$$|\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Q22. La matrice $A_n(\alpha, \beta)$ est symétrique et à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et ses valeurs propres sont donc réelles.

Q23. D'après la question **Q21** on a, en inspectant la somme des coefficients de chaque ligne de $A_n(\alpha, \beta)$ (attention à la première et à la dernière) :

$$|\lambda| \leqslant \max\left\{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|, |\beta| + |\alpha|\right\}.$$

On a évidemment $|\beta| \leqslant 2|\beta|$ car $|\beta| \geqslant 0$, donc :

$$\lambda \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$.

Q24. Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la question **Q23** montre que toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$ vérifie : $|\lambda| \leqslant 2$, c'est-à-dire : $\frac{\lambda}{2} \in [-1, 1]$. Or la fonction cosinus est surjective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, donc pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$ il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

Q25. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour calculer $\chi_{A_n}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n(0,1))$, on développe par rapport à la dernière colonne ou ligne ce déterminant et on obtient :

$$\chi_{A_n(0,1)}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne : il égale $-\chi_{A_{n-2}(0,1)}(\lambda)$. Ceci vaut pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et on en déduit :

$$\chi_{A_n(0,1)} = X \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)} - \chi_{A_{n-2}(0,1)}.$$

En composant avec $2X$ cette relation, on obtient :

$$\forall n \geqslant 3, \quad U_n = 2X \cdot U_{n-1} - U_{n-2}.$$

Q26. Montrons par récurrence *forte* sur $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \tag{5}$$

Pour $n = 1$, on a : $A_1(0,1) = (0)$, donc $\chi_{A_1} = X$, et : $U_1 = 2X$. On en déduit : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $U_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)$. Or :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2\cos(\theta),$$

d'où la proposition au rang $n = 1$.
À présent, soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, et supposons que (5) est vérifiée pour tout rang strictement inférieur à n. Alors, d'après la question précédente, pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on a :

$$U_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)U_{n-1}(\cos(\theta)) - U_{n-2}(\cos(\theta)),$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Or, d'après nos formules de trigonométrie préférées, nous avons pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$

donc :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

d'où la proposition au rang n.
Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence forte sur n nous avons démontré :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Les valeurs propres de $A_n(0,1)$ sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Or, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a :

$$\chi_{A_n(0,1)}(2\cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Voyons à quelle condition sur θ cette quantité s'annule. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors :

$$U_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \exists j \in \mathbf{Z},\ (n+1)\theta = j\pi \iff \exists j \in \mathbf{Z},\ \theta = \frac{j\pi}{n+1}.$$

On en déduit que χ_{A_n} admet pour racines tous les réels de l'ensemble :

$$\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

Notons que cet ensemble contient n éléments : en effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $\frac{j\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, et le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, donc il y est injectif. Ceci prouve que les $2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, sont distincts.
Ainsi nous avons là n racines de χ_{A_n} ; or χ_{A_n} est de degré n, en tant que polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n : il s'agit donc de l'intégralité des racines de χ_{A_n}. On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1, n]\!]\right\}$.

Puisque $A_n(0,1)$ admet n valeurs propres distinctes, elles sont toutes simples, et on en déduit que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Q28. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$. On reprend l'égalité (4), en prenant soin de distinguer la première ligne (qui donne : $2\cos(\theta_j)x_1 = x_2$), la dernière ligne (qui donne : $2\cos(\theta_j)x_n = x_{n-1}$) et les lignes intermédiaires (qui nous donnent : $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $2\cos(\theta)x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$). D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

Q29. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de E. L'équation caractéristique de sa relation de récurrence linéaire est : $r^2 - 2\cos(\theta_j)r + 1 = 0$, qui est de discriminant :

$$4\left(\cos(\theta_j)\right)^2 - 4 = -4\left(\sin(\theta_j)\right)^2 < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. On en déduit que les racines de l'équation sont complexes, égales à :

$$\cos(\theta_j) + i\sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \text{ et } \cos(\theta_j) - i\sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j},$$

donc la théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 nous dit que $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ appartient à E si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha\cos(k\theta_j) + \beta\sin(k\theta_j).$$

En particulier, $E = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\left(\cos(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}, \left(\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}\right\}$, et c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Q30. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ une suite telle que $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_k = \alpha\cos(k\theta_j) + \beta\sin(k\theta_j).$$

L'hypothèse $u_0 = 0$ implique $\alpha = 0$, tandis que $u_{n+1} = 0$ équivaut à : $\beta\sin((n+1)\theta_j) = 0$. Or $\sin((n+1)\theta_j) = 0$ d'après la résolution de la question **Q27**, donc $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $0 = 0$: c'est toujours vérifié.

On en déduit que l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ est :

$$\left\{\left(\beta\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}} \mid \beta \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{\left(\sin(k\theta_j)\right)_{k\in\mathbf{N}}\right\}.$$

Q31. D'après la question **Q28**, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, si l'on pose : $x_0 = x_{n+1} = 0$, si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0.$$

Donc x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si ses coordonnées sont les premiers termes d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de E vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. Nous avons déterminé l'ensemble de ces suites dans la question précédente : on en déduit que l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ est :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{(\sin(k\theta_j))_{k\in[\![1,n]\!]}\right\}.$$

Q32. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Si $\beta = 0$, alors $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n$. Son unique valeur propre est α, et l'espace propre associé est $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Supposons donc $\beta \neq 0$ à présent. On a :

$$A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1).$$

On en déduit, après de menus calculs, que $x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})}\}$ est un vecteur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à $\lambda \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$A_n(0,1)x = \frac{\lambda - \alpha}{\beta}x,$$

si et seulement si x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à $\dfrac{\lambda-\alpha}{\beta}$. Or nous avons démontré dans la question **Q27** que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Donc λ est une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ si et seulement s'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$\frac{\lambda-\alpha}{\beta} = 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

L'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ est donc :

$$\left\{\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

La question **Q31**, et la réflexion ci-dessus, montre alors que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ est :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}\left\{(\sin(k\theta_j))_{k\in[\![1,n]\!]}\right\}.$$

Q33. On a immédiatement : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix}$. Par hypothèse C et D commutent, donc $CD - DC = 0_n$, et on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \tag{6}$$

Q34. Nous savons que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux, donc : $\det \left(\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} \right) = \det(D) \det(I_n) = \det(D)$. De même : $\det \left(\begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC) \det(D)$. Prendre le déterminant dans l'égalité (6) donne donc :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) \det(D) = \det(AD - BC) \det(D),$$

et si D est inversible, alors $\det(D) \neq 0$ et on peut diviser cette relation par $\det(D)$ pour obtenir :

$$\det \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(AD - BC). \tag{7}$$

Or :

$$\lim_{p\to+\infty}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D+\dfrac{1}{p}I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},\ \text{ et : }\ \lim_{p\to+\infty}\left(A\left(D+\frac{1}{p}I_n\right)-BC\right)=AD-BC$$

(c'est une évidence qui peut par exemple se démontrer coefficient par coefficient), et le déterminant est continu du fait de sa multi-linéarité sur un espace vectoriel de dimension finie, donc est séquentiellement continu, et on en déduit :

$$\lim_{p\to+\infty}\det\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D+\dfrac{1}{p}I_n\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right),\ \text{ et : }$$

$$\lim_{p\to+\infty}\det\left(A\left(D+\frac{1}{p}I_n\right)-BC\right)=\det(AD-BC).$$

Donc, quand $p\to+\infty$, l'identité (8) et l'unicité de la limite impliquent :

$$\det\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=\det(AD-BC),$$

d'où le résultat même si D n'est pas inversible.

Q37. Pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, on a :

$$\chi_N(\lambda)=\det(\lambda I_{2n}-N)=\det\left(\begin{pmatrix}\lambda I_n & -I_n\\ -M & \lambda I_n\end{pmatrix}\right),$$

et les matrices $-M$ et λI_n commutent. Donc, d'après les questions précédentes :

$$\forall\lambda\in\mathbf{C},\quad \chi_N(\lambda)=\det(\lambda I_n\cdot\lambda I_n-(-I_n)\cdot(-M))=\det(\lambda^2 I_n-M)=\chi_M(\lambda^2).$$

On en déduit que $\mu\in\mathbf{C}$ est une racine de χ_N si et seulement si μ^2 est une racine de χ_M, donc :

$$\mathrm{Sp}(N)=\{\mu\in\mathbf{C};\mu^2\in\mathrm{Sp}(M)\}.$$

Q38. Si x est un vecteur propre de M associé à μ^2, en particulier il est non nul, donc $\begin{pmatrix}x\\ \mu x\end{pmatrix}$ est également non nul. De plus :

$$N\begin{pmatrix}x\\ \mu x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_n & I_n\\ M & 0_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \mu x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu x\\ Mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu x\\ \mu^2 x\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}x\\ \mu x\end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix}x\\ \mu x\end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39. Si M est inversible, alors 0 n'est pas valeur propre de M, et donc n'est pas valeur propre de N d'après la question **Q37** : on en déduit que sous cette hypothèse, N est également inversible.
Si M est de plus diagonalisable, alors d'après le critère de diagonalisation, on a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(\ker(M - \lambda I_n)) = n. \tag{9}$$

De plus, d'après la question **Q37**, si λ est une valeur propre de M alors ses deux racines carrées μ_λ et $-\mu_\lambda$ sont des valeurs propres de N (il existe bien deux racines carrées car $\lambda \neq 0$: par hypothèse M est inversible). La question **Q38** assure de plus que les applications linéaires :

$$\begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) & \to & \ker(N - \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ \mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) & \to & \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -\mu_\lambda x \end{pmatrix} \end{cases}$$

sont bien définies, et elles sont clairement injectives : si $\begin{pmatrix} x \\ \pm\mu_\lambda x \end{pmatrix} = 0_{2n}$ alors en particulier $x = 0_n$, donc leurs noyaux sont réduits au vecteur nul. Ceci démontre que pour toute valeur propre λ de M, on a :

$$\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) \geqslant \dim(\ker(M - \lambda I_n)), \text{ et } \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n})) \geqslant \dim(\ker(M - \lambda I_n))$$

(c'est par exemple une conséquence du théorème du rang). En conclusion :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} 2\dim(\ker(M - \lambda I_n)) \overset{(9)}{=} 2n,$$

mais on a aussi : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) \leqslant 2n$, puisqu'il s'agit de la dimension de la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) \oplus \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))$ (les μ_λ sont tous distincts pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$), qui est incluse dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ de dimension $2n$. On en déduit :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (\dim(\ker(N - \mu_\lambda I_{2n})) + \dim(\ker(N + \mu_\lambda I_{2n}))) = 2n,$$

donc d'après le critère de diagonalisation la matrice N est diagonalisable.
En conclusion, si M est diagonalisable et inversible alors N l'est également.

Exercice 4

1. • Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\chi_{M_a}(X) = \det\left(\begin{array}{c|cc} X-1 & -a & 0 \\ \hline 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{array}\right) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$.
χ_{M_a} est donc scindé et M_a a donc deux valeurs propres : 1 (valeur propre double) et -1.
Par suite, M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(M_a)) = 2$.
Or,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow (M_a - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases},$$
donc.
si $a \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow y = z = 0$, donc $E_1(M_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1, donc M_a n'est pas diagonalisable.
si $a = 0$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow y = z$, donc $E_1(M_a) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2, donc M_a est diagonalisable.
Conclusion : M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, 0 n'est pas valeur propre de M_a, donc M_a est inversible
3. Soit $a \neq 0$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.
Montrer que M_a est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ revient à montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est A.
Analyse : Si une telle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ existe, alors on a :
— $u(e_1) = -e_1$, donc e_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -1.
Or
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(M_a) \Leftrightarrow (M_a + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -\dfrac{a}{2}y \end{cases}.$$
On peut choisir $e_1 = (-a/2, 1, -1)$.
$u(e_2) = e_2$, donc, d'après la première question, on peut choisir $e_2 = (1, 0, 0)$.
$u(e_3) = e_2 + e_3$, donc, en posant $e_3 = (x, y, z)$, on a :
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 1 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/a \\ z = 1/a \end{cases}.$$
On peut donc choisir $e_3 = (0, 1/a, 1/a)$.
Synthèse : Réciproquement, avec de tels choix pour e_1, e_2 et e_3,
— la matrice de la base canonique de (e_1, e_2, e_3) est $P = \begin{pmatrix} -a/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/a \\ -1 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$ et, comme $\det(P) = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ -1 & 1/a \end{vmatrix} = -2/a \neq 0$ (en développant par rapport à la deuxième colonne), P est inversible, donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
— Par construction, on a $u(e_1) = -e_1$, $u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$, donc
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Conclusion : Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est A, donc A et M_a sont semblables.