Correction devoir surveillé 2 - Version difficile

Algèbre linéaire 4h

Problème 1

On note respectivement χ_M et χ_u les polynômes caractéristiques d'une matrice carrée M de taille n et d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Q8. Ce sont des résultats de cours. Donnons des justifications raisonnables en termes de longueur.
Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBP^{-1}$ (A et B sont semblables).
Par propriété de la trace, on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}((PB)P^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{tr}(B)$.
Par multiplicativité du déterminant et comme $\det(P) \neq 0$, on peut écrire que :

$$\det(A) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(B)\frac{1}{\det(P)} = \det(B).$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - A) = \det(P(\lambda \mathrm{I}_n)P^{-1} - PBP^{-1}) = \det(P)\det(\lambda \mathrm{I}_n - B)\frac{1}{\det(P)} = \chi_B(\lambda).$$

On en déduit que le polynôme $\chi_A - \chi_B$ admet une infinité de racines, donc que $\chi_A - \chi_B = 0_{\mathbb{R}[X]}$, puis $\chi_A = \chi_B$.
Le rang d'une matrice carrée est invariant par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible, donc $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(PB) = \mathrm{rang}(PBP^{-1}) = \mathrm{rang}(A)$.

Q9. Comme déterminants et polynômes caractéristiques de matrices triangulaires supérieures obtenus par produit des éléments diagonaux, on a $\det(A) = 4 = \det(B)$ – en particulier, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = 3$ car A et B sont inversibles – et $\chi_A = (X-2)^2(X-1) = \chi_B$. On a aussi directement $\mathrm{tr}(A) = 5 = \mathrm{tr}(B)$. Comme la seule valeur propre non-simple de A et B est 2 (qui est une valeur propre double), l'une de ces matrices est diagonalisable *si et seulement si* le rang de cette matrice moins $2\mathrm{I}_3$ est 1. Or, $A - 2\mathrm{I}_3$ est visiblement de rang 1 car toutes ses colonnes sont identiques (donc colinéaires), alors que $B - 2\mathrm{I}_3$ possède deux colonnes non colinéaires (la première et la dernière) : elle est de rang au moins 2 (et même exactement 2, car la deuxième est nulle). Ainsi, A est diagonalisable, donc semblable à $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$; en revanche, B n'est pas diagonalisable. En raisonnant par l'absurde et en vertu de la transitivité de la relation de similitude, si B était semblable à A, elle serait aussi diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. Contradiction. En définitive, A et B ne sont pas semblables.

Q10. *Première méthode :* En notant $\epsilon_1 = e_2$, $\epsilon_2 = e_1$ et $\epsilon_3 = e_3$, on a $u(\epsilon_1) = \epsilon_2 + \epsilon_3$, $u(\epsilon_2) = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$ et $u(\epsilon_3) = \epsilon_2$, donc $\mathrm{Mat}_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)}(u) = B$. Ainsi, A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans deux bases différentes : A et B sont semblables.

Deuxième méthode : En développant les déterminants correspondants (en employant au besoin la règle de Sarrus), on obtient que $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$. La fonction $t \mapsto t^3 - 3t - 1$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto 3(t^2 - 1)$, dont les zéros sont -1 et 1. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\chi_A'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\chi_A(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la restriction strictement monotone de $t \mapsto \chi_A(t)$ à $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ – d'images respectives $]-\infty, 1[$, $]-3, 1[$ et $]-3, +\infty[$ contenant toutes 0 –, $t \mapsto \chi_A(t)$ s'annule exatement trois fois sur $\mathbb{R}$: χ_A admet trois racines réelles distinctes, notées α, β et γ. Ce polynôme est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que A et B sont diagonalisables et toutes deux semblables à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

Q11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, d'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème du rang, $\ker(A)$ est de dimension $n - 1$.

Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\ker(A)$. On la complète – d'après le théorème de la base incomplète – en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Le vecteur $u(e_n)$ se décompose de manière unique dans $\mathcal{B}$ sous la forme $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, avec $(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, car $u(e_n) \neq 0$, sans quoi u serait nul. Il est alors immédiat que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = U$ (avec les notations de l'énoncé).

Q12. *Application :* On conserve les notations de la question précédente en choisissant une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice U de u est de la forme précédente. C'est possible, car la matrice de u dans une base quelconque est encore de rang 1 : elle est semblable, d'après la question précédente à U ; on sait alors qu'il existe une base $\mathcal{B}$ convenable.

Un calcul direct donne $U^2 = a_n U$. Comme $U^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ par hypothèse ($u \circ u \neq 0$), on a $a_n \neq 0$. Ainsi, $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de U, donc de u, scindé à racines simples. On sait alors que u est diagonalisable.

Q13. Donnons un contre-exemple. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique. Son polynôme caractéristique est X^2 d'unique racine 0, donc $\mathrm{Sp}(C) = \{0\}$.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est visiblement pas le cas.

Q14. La famille des colonnes de A est engendrée par $\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\\ \beta\\ \alpha\end{pmatrix}\right)$. Ainsi, A est de rang au plus deux.

Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ au moins l'une de ces colonnes est non nulle : A est de rang au moins 1. Enfin, A est de rang 1 *si et seulement si* ces deux colonnes sont proportionnelles, c'est-à-dire *si et seulement si* il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \lambda\beta$ et $\beta = \lambda\alpha$. Si A est de rang 1, on a donc $\lambda^2\alpha = \alpha$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$ car $\alpha \neq 0$: c'est exclu par hypothèse (α et β ne sont ni égaux ni opposés). Ainsi, A n'est pas de rang 1 : c'est une matrice de rang 2.

D'après le théorème du rang, $\ker(A)$ est de dimension 2, c'est-à-dire que 0 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension 2. La première (resp. la deuxième) et la troisième (resp. la dernière) colonne de A sont égales. On en déduit que $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ sont des éléments de $\ker(A)$. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, donc une base de l'espace $\ker(A)$ de dimension 2.

D'après le théorème spectral, la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable (en base orthonormée). Exhibons des vecteurs propres associés aux valeurs propres proposées, qui sont non nulles et distinctes par hypothèse sur α et β.

Des calculs matriciels directs donnent que $(1, 1, 1, 1)$ (resp. $(1, -1, 1, -1)$) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $2(\alpha + \beta)$ (resp. $2(\alpha - \beta)$). Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, notons $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ.

On a $4 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A)) + \dim(E_{2(\alpha-\beta)}(A)) \leq \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq 4$.

L'encadrement implique qu'il y a égalité partout : On a nécessairement $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2(\alpha+\beta), 2(\alpha-\beta)\}$ et $\dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A)) = 1 = \dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A))$.

On sait alors que la famille $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A.

Q15. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de telle sorte que $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = \lambda e_2 + a e_1$. On a alors $u(\frac{b}{a}e_2) = \lambda(\frac{b}{a}e_2) + b e_1$. De plus, la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (e_1, \frac{b}{a}e_2)$ dans la base canonique est $\mathrm{diag}(1, \frac{b}{a})$ de déterminant $\frac{b}{a} \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est B. On en déduit que A et B sont semblables.

Q16. On a $PB = AP$, c'est-à-dire $RB + iSB = AR + iAS$ et, par unicité des parties réelles et imaginaires des coefficients matriciels, $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. Comme R et S sont réelles, la fonction $f \colon x \mapsto \det(R + xS)$ est à valeurs réelles. C'est aussi une fonction polynomiale, car le déterminant est une application polynomiale en les coefficients matriciels. On peut donc considérer le polynôme P associé, qui est à coefficients réels, mais qu'on peut voir comme un élément de $\mathbb{C}[X]$. Ce polynôme ne s'annule pas en i, car $\det(R + iS) \neq 0$ en vertu du fait que P est inversible : $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$. On en déduit que $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc que f n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + xS) = P(x) = f(x) \neq 0$, c'est-à-dire que $R + xS$ est inversible.

Q18. Par combinaison linéaire et d'après la question 16, on a $(R + xS)B = A(R + xS)$. La matrice $P_0 = R + xS$ est inversible d'après la question 17. On peut donc écrire, en multipliant la relation précédente à gauche par P_0^{-1}, que $B = P_0^{-1}AP_0$, c'est-à-dire que A et B sont semblables (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Q19. *Application :* Le calcul montre que $\chi_B = X^3 + X = X(X - i)(X + i)$. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$. Les matrices A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ car leur polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Elles sont semblables entre-elles car semblables à la matrice $\mathrm{diag}(0, i, -i)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. D'après le résultat de la question 18, A et B sont encore semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Problème 2

Q1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E. Posons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Puisque $M^k = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$, on a :

$$\begin{aligned} u \text{ est nilpotent d'indice } p &\Leftrightarrow M \text{ est nilpotente d'indice } p \\ &\Leftrightarrow M^p = 0 \text{ et } M^{p-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = 0 \text{ et } Mat_{\mathcal{B}}(u^{p-1}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0. \end{aligned}$$

On utilisera dans la suite que $\boxed{u \text{ est nilpotent d'indice } p \text{ si et seulement si } u^p = 0 \text{ et } u^{p-1} \neq 0.}$
Soit un endomorphisme nilpotent d'indice 1, alors $u = u^1 = 0$.
$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$

Q2. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geq 2$. p est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$.
Donc $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ (sinon cela contredirait la minimalité de l'entier p).
Puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$

Q3. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p \geq 2$. Puisque $u^p = 0$, on a également $\boxed{\forall k \geq p, u^k = 0.}$
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0. \quad (*)$$

- En appliquant l'endomorphisme u^{p-1} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_1 u(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- En appliquant l'endomorphisme u^{p-2} à l'équation $(*)$, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$ or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_2 u^2(x) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.
- ...
- En itérant le procédé, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-2} = 0$.
  L'équation $(*)$ devient : $\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$. Or $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_{p-1} = 0$.
- Finalement, $\forall i \in [|0, p-1|], \lambda_i = 0$, donc la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots u^{p-1}(x))$ est libre.

Ainsi $\boxed{\text{la famille } (u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} \text{ est libre.}}$
L'espace vectoriel E est de dimension 2, donc toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à 2.
La famille libre $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est de cardinal p, d'où $p \leq 2$. Or $p \geq 2$ donc $\boxed{p = 2.}$

Q4. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$, donc $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Puisque $u \neq 0$ n'est pas l'endomorphisme nul, son rang vérifie $\text{rg}(u) \geq 1$.
Puisque $\dim(E) = n = 2$, $\text{rg}(u)$ vaut 1 ou 2.
Supposons par l'absurde que $\text{rg}(u) = 2$, alors u serait bijectif, donc u^2 serait également bijectif. Ceci est absurde car $u^2 = 0$. On a donc $\text{rg}(u) = 1$.
Par le théorème du rang, on a de plus $\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) = 2$ donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 2 - 1 = 1$.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. En effet, soit $x \in \text{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \text{Ker}(u)$.
On obtient $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et ces sous-espaces vectoriels sont de même dimension 1, d'où l'égalité $\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Im}(u).}$

Q5. On a montré que $p = 2$ et que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1} = (x, u(x))$ est libre.
La famille $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est libre et de cardinal 2 dans un espace E de dimension 2, donc c'est une base de E.
De plus $u(x) = 0x + 1u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0$ donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.$$

$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (x, u(x)) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ vaut } J_2.}$

Q6. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de $M_2(\mathbb{C})$, d'indice de nilpotence p.
Si $p = 1$, alors $A = 0$ donc la trace et le déterminant de A sont nuls.
Si $p \geq 2$, on a montré que $p = 2$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Alors u est nilpotent d'indice 2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$.
Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, alors $P^{-1}AP = J_2$ et A et J_2 sont semblables.
Puisque A et J_2 sont semblables, elles ont même trace et même déterminant. Or $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle et de déterminant nul, donc A également.
On a montré que si $A \in M_2(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A) = A^2 = 0$ et A est nilpotente.
Ainsi $\boxed{\text{les matrices nilpotentes de } M_2(\mathbb{C}) \text{ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$

Q7. L'endomorphisme u est nilpotent d'indice $p = 2$ et de rang r.
Puisque u est nilpotent d'indice $p = 2$, on a $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$.
Montrons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors $\exists y \in E, x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u).}$ En particulier, on a $r = \mathrm{rg}(u) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par le théorème du rang,

$$2r = r + r \leq \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E) = n,$$

donc $\boxed{2r \leq n.}$

Q8. On a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont de même dimension r et $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = 2r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = n - r = r$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H.
Puisque $u^2 = 0$, on a $\forall i \in [|1, r|], u(e_i) \in \mathrm{Ker}(u)$. Montrons que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ des scalaires tels que $\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$. Par linéarité de u :

$$0 = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r).$$

Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$ appartient à $H \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc est nul. Or la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre donc $\forall i \in [|1, r|], \lambda_i = 0$.
Finalement, $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$ qui est de dimension r, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
La décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$

Q9. Notons $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r))$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k \in [|1, r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2 = 0$ donc $u(u(e_k)) = 0$. Chaque famille $(e_k, u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ sur la diagonale. On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_2 & & \\ & \ddots & \\ & & J_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(J_2, \ldots J_2) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q10. On a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ avec $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - r > r$.
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E : $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Alors $\dim(H) = r$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H.
Comme dans la question **Q8.**, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est encore une famille libre et de cardinal r de $\mathrm{Ker}(u)$

qui est de dimension $n-r>r$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\mathrm{Ker}(u)$, en rajoutant $(n-r)-r=n-2r$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1,\dots,v_{n-2r})$.
La décomposition $E=H\oplus\mathrm{Ker}(u)$ montre qu'en réunissant la base $(e_1,\dots,e_r)$ de H et la base $(u(e_1),\dots,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une base de E.
En réordonnant cette base, $\boxed{(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$

Q11. Notons $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ la base de E obtenue dans la question précédente.
Soit $k\in[|1,r|]$, alors u envoie e_k sur $u(e_k)$.
$u^2=0$ donc $u(u(e_k))=0$. Chaque famille $(e_k,u(e_k))$ fait apparaître un bloc $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=J_2$ sur la diagonale. Les vecteurs $v_1,\dots,v_{n-2r}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$ donc $\forall k\in[|1,n-2r|], u(v_k)=0$.
On en déduit la matrice par blocs de u dans $\mathcal{B}$, qui contient r blocs J_2 puis $n-2r$ termes 0 sur la diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}J_2&&&\\&\ddots&&\\&&J_2&\\&&&0_{n-2r}\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{Diag}(J_2,\dots J_2,0_{n-2r}) \text{ avec } r \text{ blocs diagonaux } J_2.}$

Q12. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p\geq 1$. Alors $A^p=0$ donc le polynôme $P(X)=X^p$ annule A.
D'après le cours, $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathrm{Racines}(P)=\{0\}$. De plus, le polynôme caractéristique de A est de degré $n\geq 1$ et scindé sur $\mathbb{C}$ donc possède au moins une racine, donc le spectre de A est non vide et nécessairement $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de } A.}$

Q13. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et diagonalisable.
Alors A est semblable à une matrice diagonale $D\in M_n(\mathbb{C})$ dont la diagonale contient les valeurs propres de A.
On a montré que $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$, donc $D=0$.
Ainsi $\exists P\in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP=D=0$, d'où $A=P0P^{-1}=0$ et A est nulle.
Réciproquement, la matrice nulle est clairement diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$

Q14. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Puisque 0 est la seule valeur propre, la seule racine de son polynôme caractéristique χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X)=X^n$.
Réciproquement, soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A(X)=X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A annule A donc $\chi_A(A)=A^n=0$ et la matrice A est nilpotente (d'indice de nilpotence $p\leq n$).
$\boxed{\text{Une matrice } A\in M_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique vaut } \chi_A(X)=X^n.}$

Q15. On suppose que 0 est l'unique valeur propre de $A\in M_n(\mathbb{C})$.
Les racines du polynôme caractéristique χ_A sont exactement les valeurs propres de A. Donc la seule racine de χ_A est 0. De plus χ_A est unitaire et de degré n, donc $\chi_A(X)=X^n$.
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.
$\boxed{\text{Si 0 est l'unique valeur propre de } A\in M_n(\mathbb{C}), \text{ alors } A \text{ est nilpotente.}}$

Q16. Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire de diagonale nulle. Alors le polynôme caractéristique se calcule aisément : $\chi_A(X)=\det(XI_n-A)=X^n$ (la matrice XI_n-A est en effet triangulaire supérieure avec des X sur sa diagonale).
D'après la question **Q14.**, A est nilpotente.
$\boxed{\text{Une matrice triangulaire de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de diagonale nulle est nilpotente.}}$
Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Alors $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$.
Son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T=P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont semblables donc ont même spectre, or $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$, donc les coefficients diagonaux de T, qui sont aussi ses valeurs propres, valent 0.
$\boxed{\text{Une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$

Q17. Soit A une matrice nilpotente d'indice p. Alors $A^p=0$.
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme multiple de X^p. Alors il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(X)=X^pQ(X)$.
Alors $P(A)=A^pQ(A)=0Q(A)=0$ donc P est un polynôme annulateur de A.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente d'indice } p, \text{ alors tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ multiple de } X^p \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

Q18. Soit A une matrice nilpotente et P un polynôme annulateur de A.
Puisque A est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.
Puisque P annule A, $\{0\} = \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Racines}(P)$: les valeurs propres de A sont des racines de P.
En particulier, $\boxed{0 \text{ est racine de } P.}$

Q19. On a $P(A) = 0$ et $P(X) = X^m Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.
Puisque $Q(0) \neq 0$, 0 n'est pas racine de Q. On note d le degré de Q, $C \neq 0$ son coefficient dominant, a_k ses racines qui sont toutes non nulles, alors

$$Q(X) = C \prod_{k=1}^{d} (X - a_k). \quad Q(A) = C \prod_{k=1}^{d} (A - a_k I_n).$$

A est nilpotente donc 0 est la seule valeur propre de A. Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, λ n'est pas valeur propre de A donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la matrice $(A - \lambda I_n)$ est inversible.
Ainsi $\forall k \in [|1, d|], a_k \neq 0$ donc $(A - a_k I_n)$ est inversible. Alors $Q(A)$ est un produit de matrices inversibles, donc $\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$
On en déduit alors :

$$0 = P(A) = A^m Q(A) \quad \Rightarrow \quad A^m = 0(Q(A))^{-1} = 0$$

donc $A^m = 0$. Par minimalité de l'indice de nilpotence p de A, on a $p \leq m$. Ainsi $\exists l \in \mathbb{N},\ m = p + l$ et

$$P(X) = X^m Q(X) = X^p (X^l Q(X)),$$

donc $\boxed{P \text{ est un multiple de } X^p \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$

Q20. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. La trace de A est nulle : $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0$. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0.}$
Notons C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A, puisque $C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$ on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1)$ donc $\mathrm{rg}(A) \leq 1$. Or $A \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$
Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2.}$
En particulier, 0 est valeur propre de A, de multiplicité au moins 2.
Supposons que 0 soit valeur propre de multiplicité exactement 2 dans χ_A, alors il existe une valeur propre $\lambda \neq 0$, nécessairement de multiplicité 1.
Puisque la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, on aurait :

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 = 2 \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda,$$

donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde. Ainsi 0 est valeur propre de multiplicté 3 dans le polynôme caractéristique, donc $\boxed{\chi_A(X) = X^3.}$ Par la question **Q14.**, A est nilpotente.
Un simple calcul montre que $A^2 = 0$ avec $A \neq 0$, donc $\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence } p = 2.}$

Q21. A est nilpotente d'indice 2 donc il existe $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que $Ae_1 \neq 0$. On pose ensuite $e_2 = Ae_1$. On peut prendre par exemple

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(A), \quad e_2 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

$A^2 = 0$ donc $Ae_2 = A^2 e_1 = 0$ et $e_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Or $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 2 donc on peut trouver e_3 tel que (e_2, e_3) forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$. On prend par exemple

$$e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A).$$

Posons

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Alors P est inversible (en calculant son déterminant par exemple). Puisque $Ae_1 = e_2, Ae_2 = Ae_3 = 0$, la matrice de l'endomorphisme u canoniquement associé à A dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ vaut

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(J_2, J_1).}$$

Q22. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho)$. L'égalité $R^2 = A$ conduit à

$$R^2 = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho))^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\rho^2) = A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u).$$

Donc $\boxed{\rho^2 = u.}$ Alors $u \circ \rho = \rho^2 \circ \rho = \rho^3 = \rho \circ \rho^2 = \rho \circ u$ donc $\boxed{u \text{ et } \rho \text{ commutent.}}$
Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. $\exists y \in E,\ x = u(y)$. Alors $\rho(x) = \rho(u(y)) = u(\rho(y)) \in \mathrm{Im}(u)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $u(\rho(x)) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$ donc $\rho(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \text{ est stable par } \rho.}$
Puisque $A^2 = 0$, on a $u^2 = 0$ d'où $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$. Ainsi $\rho^4 = 0$ et $\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$

Q23. Posons $R' = P^{-1}RP$. Alors

$$(R')^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2PP^{-1}AP = \mathrm{Diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la question **Q21.** pour les vecteurs e_1, e_2, e_3, on a $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Déterminons $\rho(e_1), \rho(e_2), \rho(e_3)$ en utilisant que la matrice de ρ^2 vaut $(R')^2$, et que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u. On a en particulier

$$\begin{cases} \rho^2(e_1) &= e_2. \\ \rho^2(e_2) &= 0. \\ \rho^2(e_3) &= 0. \end{cases}$$

- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_2)$ est stable par ρ donc $\exists a \in \mathbb{C}, \rho(e_2) = ae_2$.
  Alors $\rho^2(e_2) = a^2e_2 = 0$ donc $a = 0$ et $\boxed{\rho(e_2) = 0.}$
- $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par ρ donc $u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \rho(e_3) = ae_2 + be_3$. Alors

  $$\rho^2(e_3) = a\rho(e_2) + b\rho(e_3) = b\rho(e_3) = abe_2 + b^2e_3 = 0.$$

  Puisque (e_2, e_3) est libre, $ab = b^2 = 0$ donc $b = 0$ et $\boxed{\rho(e_3) = ae_2.}$
- $\exists (b, c, d) \in \mathbb{C}^3, \rho(e_1) = be_1 + ce_2 + de_3$. Alors

  $$\rho^2(e_1) = e_2 = b\rho(e_1) + c\rho(e_2) + d\rho(e_3) = b(be_1 + ce_2 + de_3) + dae_2 = b^2e_1 + (bc + da)e_2 + bde_3.$$

  Donc

  $$b^2e_1 + (bc + da - 1)e_2 + bde_3 = 0.$$

  La famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc ces trois coefficients sont nuls.

  $$\begin{cases} b^2 &= 0. \\ bc + da - 1 &= 0. \\ bd &= 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ da &= 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0. \\ d &= 1/a,\ a \neq 0. \end{cases}$$

On en déduit finalement qu'il existe $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \rho(e_1) &= ce_2 + (1/a)e_3. \\ \rho(e_2) &= 0. \\ \rho(e_3) &= ae_2. \end{cases} \Rightarrow R' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, une telle matrice vérifie bien $(R')^2 = \mathrm{Diag}(J_2, J_1)$.
Donc l'ensemble des racines carrées de A vaut :

$$\boxed{\{\text{racines carrées de } A\} = \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, a \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C} \right\}}$$

où P est la matrice de passage définie à la question **Q21.**.

Q24. On démontre le résultat préliminaire suivant.
Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Alors $\chi_B(X) = X^n$ donc $B^n = 0$ et $p \leq n$.
Ainsi $\boxed{\text{l'indice de nilpotence } p \text{ d'une matrice nilpotente } B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie } p \leq n.}$

On suppose qu'il existe une solution R vérifiant $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En calculant $(J_3)^2$ et $(J_3)^3$:

$$R^4 = (R^2)^2 = (J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^6 = (R^2)^3 = (J_3)^3 = 0.$$

On en déduit que $\boxed{R \text{ est nilpotente.}}$ Puisque $R^4 \neq 0$ et $R^6 = 0$, l'indice de nilpotence de R vaut $q = 5$ ou $q = 6$, or $n = 3$ donc $q > n$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{L'équation } R^2 = J_3 \text{ n'a pas de solution.}}$