Mars 2023 **Correction devoir surveillé 10** Calculatrice interdite

Probabilité - Fonctions à plusieurs variables

Exercice 2

1. D'après le cours, $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, donc $\forall t \in]-2,2[$,

$$G_X(t)=\frac{1}{2-t}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^n}$$

Donc $\boxed{\forall t \in]-2,2[,\ G_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}}$.

2. D'après le cours, $\forall t \in]-1,1[$, $(1+t)^\alpha=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}t^n$ donc, $\forall t \in]-1,1[$,

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!}t^n$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient d'ordre n est donc :

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{2^{n-1}n!}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n\left(\prod_{k=1}^{n-1}2k\right)n!}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ le coefficient d'ordre } n \text{ demandé est } \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}}$.

3. D'après la question précédente,

$$G_Y(t)=2-\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{t}{2}}=2-\sqrt{2}-\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}\left(-\frac{t}{2}\right)^n=2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2(2n-1)}t^n$$

4. D'après le cours $G_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)t^n$ et $G_Y(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)t^n$ donc d'après l'unicité du développement en séries entières, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}}$ et

$\boxed{P(Y=0)=2-\sqrt{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n)=\dfrac{\sqrt{2}(2n)!}{2^{3n}(n!)^2(2n-1)}}$.

5. Comme X et Y sont indépendantes, d'après le cours, $G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} - (2-t)^{-\frac{1}{2}}$.

   De même que dans les questions précédentes,

$$\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{2^n}$$

et

$$\begin{aligned}(2-t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!}\left(-\frac{t}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^{2n}n!}t^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}t^n\end{aligned}$$

Donc $G_S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{(2n)!}{2^{2n}\sqrt{2}(n!)^2}\right)t^n$ et par unicité du développement en série entière,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(S=n) = \dfrac{1}{2^n}\left(1-\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\sqrt{2}(n!)^2}\right)}$.

6. 1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X+1=n) = P(X=n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $\boxed{X+1 \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)}$.

6.2. D'après le cours $\boxed{E(X) = E(X+1)-1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1 \text{ et } V(X) = V(X+1) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2}$.

6.3 G_Y est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ comme différence et composition de fonctions deux fois dérivables et $\forall t \in [-1,1]$, $G_Y'(t) = \dfrac{1}{2}(2-t)^{-\frac{1}{2}}$ et $G_Y''(t) = \dfrac{1}{4}(2-t)^{-\frac{3}{2}}$. Donc

$\boxed{E(Y) = G_Y'(1) = \dfrac{1}{2} \text{ et } E(Y(Y-1)) = G_Y''(1) = \dfrac{1}{4}}$.

6.4 Donc, d'après la formule de Koenig-Huygens, la linéarité de l'espérance et la question précédente,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc $\boxed{V(Y) = \dfrac{1}{2}}$.

6.5 D'après la linéarité de l'espérance $E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ donc $\boxed{E(S) = \dfrac{3}{2}}$.

Comme X et Y sont indépendantes, $V(S) = V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ donc $\boxed{V(S) = \dfrac{5}{2}}$.

Exercice 3

1. • La fonction f est polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $m = (,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{cases} \partial_1 f(m) & = -4(x-y) + 4x^3 \\ \partial_2 f(m) & = 4(x-y) + 4y^3 \end{cases}$$

• Déterminons les points critiques de f. Pour $m = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \nabla f(m) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ -2x + x^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $m_0 = (0,0)$, $m_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $m_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

• La matrice hessienne de f au point courant m de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2 f(m) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

• On a $f(m_0) = 0$ et $\nabla^2 f(m_0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. On a $\det \nabla^2 f(m) = 0$ donc on ne peut rien affirmer. Mais :
— pour x réel non nul : $f(x,x) = 2x^4 > 0$;
— pour x réel non nul : $f(x,0) = -2x^2 + x^4 < 0$ si x est au voisinage de 0.
Ainsi f n'admet pas en m_0 d'extremum local.

• On a $f(m_1) = -8$ et $\nabla^2 f(m_1) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$. Ainsi $\det \nabla^2 f(m_1) > 0$: les valeurs propres de $\nabla^2 f(m_1)$ sont de même signe. Comme $\mathrm{tr} \nabla^2 f(m_1) > 0$, elles sont positives : f admet en m_1 un minimum local strict.

• De même f admet en m_2 un minimum local strict

2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $|x| + |y| \geqslant 4$. On a alors :

$$x^4 + y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \geqslant \frac{1}{8}\left(|x|+|y|\right)^4 \quad = \quad \frac{1}{8}\underbrace{\left(|x|+|y|\right)^2}_{\geqslant 16}\left(|x|+|y|\right)^2 \geqslant 2\left(|x|+|y|\right)^2 \geqslant 2\left(x-y\right)^2.$$

Ainsi $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 \geqslant 0$

3. Si f admet un extremum global en m alors m est un extremum local de f donc $m = m_1$ ou m_2. Rappelons que $f(m_1) = f(m_2) = -8$.
Soit maintenant $K = \{(,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 4\}$, qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi $f \mid K$, qui est continue, admet un un point m de K K un minimum global
Or pour tout q hors de K, $f(q) \geqslant 0 \geqslant f(m_1) \geqslant f(m)$, donc f admet en m un minimum global et on a vu que l'on a alors $m = m_1$ ou $m = m_2$.

Exercice 4

1. Remarquons que $f(x,x) = 1/2$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0 : f n'est pas continue en 0.
2. Puisque $f(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe, et vaut 0.
3. f ne peut pas être différentiable puisqu'elle n'est pas continue!

Exercice 1

$\boxed{1}$ Il faut vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

$\boxed{2}$ Il faut vérifier que $\sum kP(X=k)$ est AC.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |kP(X=k)| = \sum_{k=0}^{\infty} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,pq^k$$

or $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

et $\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ainsi: $\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(X=k) = p \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \boxed{\frac{q}{p} = E(X)}$

3 • $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=Y=k)$

or X et Y sont indépendantes, donc

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\,P(Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2}$$

$$= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \boxed{\frac{p}{1+q}}$$

• $P(X<Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k=X<Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} P(X=k, Y=\ell)$

or X, Y indépendantes.

$$P(X<Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} P(X=k)\,P(Y=\ell)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p^2 q^{k+\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} p^2 q^k \cdot \frac{q^{k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{p^2 q}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} (q^2)^k = \frac{p^2 q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} = \boxed{\frac{q}{1+q}}$$

4 $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit k dans $\mathbb{N}$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) \quad \text{or } X, Y \text{ ind.}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} p q^i p q^{k-i} = \boxed{(k+1)\,p^2 q^k}$$