PSI - Sept. 2018

Correction devoir surveillé n^{o}1

Calculatrices interdites

Algèbre linéaire

Exercice 1

1. On a :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

2. En remplaçant P par L_i avec i quelconque dans $[\![0, n]\!]$, l'équation $(*)$ devient $\lambda_i = 0$.
3. Notons pour tout i de $[\![0, n]\!]$, f_i l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_i(P) = P(a_i)$. La question précédente permet de dire que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 2

1. α étant réel,

$$|z - \alpha|^2 = (\mathrm{Re}(z) - \alpha)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geq \mathrm{Im}(z)^2$$

ce qui donne le résultat en passant à la racine carrée.

2. Notons $d = \deg(P)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les racines de P comptées avec leurs multiplicités (il y en a d puisque l'on suppose P scindé de degré d). On a alors (P étant unitaire)

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| = \left|\prod_{i=1}^{d}(z - \alpha_i)\right| = \prod_{i=1}^{d}|z - \alpha_i|$$

On utilise alors la question précédente avec les α_i et, comme on peut multiplier des inégalités entre réels positifs,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$$

3. On a immédiatement

$$P(X) = (X + 1)(X^2 - X + 1) = (X + 1)(X + j)(X + j^2) \quad \text{avec} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

La première expression est la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$. La deuxième la décomposition sur $\mathbb{C}[X]$. On a alors immédiatement

$$0 = |P(j)| < |\mathrm{Im}(j)|^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

4. Si $P(z) = 0$ alors l'hypothèse faite donne $\mathrm{Im}(z) = 0$ et z est donc réel. Comme P est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de Gauss), le fait que toute racine complexe est réelle donne le caractère scindé sur $\mathbb{R}$ de P.
5. On a donc montré que P (supposé élément de $\mathbb{R}[X]$) est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$.

Exercice 3

1. On a :

$$det(A_2) = -1 \qquad\qquad det(A_3) = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pour A_4, on développe suivant la ligne 4, puis suivant la ligne 1. On obtient :

$$det(A_4) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

2. Soit $k \in [[1, n-1]]$.

$$\varphi(X^k) = (n-1)X^{k+1} + (1-X^2)kX^{k-1} = kX^{k-1} + (n-1-k)X^{k+1}$$

Pour $k = 0$, la formule reste vraie : $\varphi(X^0) = (n-1)X$.

3. La dérivation et le produit d'un polynôme par un autre est linéaire. Donc φ est linéaire. De plus, d'après la question précédente, on a $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ y compris pour $k = n-1$ puisque :

$$\varphi(X^{n-1}) = kX^{n-2} + 0 \times X^{k+1} = kX^{n-2}$$

Ainsi $\phi(P)$ est bien dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et φ est un endomorphisme de E.

4. Pour écrire la matrice B de φ dans la base $\mathcal{B}$, il faut regarder l'image d'une base,
or on a vu que $\varphi(X^j) = jX^{j-1} + (n-1-j)X^{j+1}$,
ce qui signifie que les coefficients de B sont nuls, sauf : $b_{j+1,j} = n-1-j$ et $b_{j-1,j} = j-1$.
On retrouve la définition des coefficients de A_n. Donc $\underline{M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A_n}$

5. On a :

$$P_h' = h(X-1)^{h-1}(X+1)^{n-1-h} + (n-1-h)(X-1)^h(X+1)^{n-2-h}$$

Et, puisque $(1-X^2) = -(X-1)(X+1)$:

$$\varphi(P_h) = [(n-1)X - h(X+1) - (n-1-h)(X-1)]P_h = (n-1-2h)P_h = \lambda_h P_h$$

6. Le réel -1 est racine d'ordre $n-1-h$ de P_h. Donc -1 est racine d'ordre $n-1-h-k$ (qui est positif) de $P_h^{(k)}$ pour $k \leq n-1-h$ et $P_h^{(k)}(-1) = 0$

7. On montre tout d'abord que la famille est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$$

On évalue en -1, on obtient $\lambda_{n-1} = 0$, puis on dérive et on évalue en -1, on trouve $\lambda_{n-2} = 0$, etc.... Par récurrence immédiate, les λ_i sont nuls et la famille est libre. De plus elle présentent $n = dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ vecteurs, c'est une base.

8. D'après la question 5, la matrice de ϕ dans la base β est la matrice diagonale $diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$.

9. Le déterminant de φ est donc égal à $\lambda_0 \times \ldots \times \lambda_{n-1}$. Il est donc non nul si et seulement si les λ_i sont non nuls c'est-à-dire si n est pair.

Exercice 4

1. φ_n et B_n sont des applications linéaires, en effet, pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda P + Q) &= nX(\lambda P+Q)(X) + X(1-X)(\lambda P+Q)'(X)\\ &= \lambda[nXP(X) + X(1-X)P'(X)] + [nXQ(X) + X(1-X)Q'(X)]\\ &= \lambda\varphi_n(P) + \varphi_n(Q)\end{aligned}$$

Pour B_n, on a :

$$\begin{aligned}B_n(\lambda P+Q)(X) &= \sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X)\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) + \sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X)\\ &= \lambda B_n(P) + B_n(Q)\end{aligned}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, car le polynôme :

$$\varphi_n(X^k) = nX^{k+1} + X(1-X)kX^{k-1} = (n-k)X^{k+1} + kX^k$$

a un degré $k+1 \le n$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $\varphi_n(X^n) = nX^n$ a un degré n, donc, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$, ainsi, $\varphi_n n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Et, $B_n(P) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, car $P\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_{kn} \in \mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi, φ_n et B_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\varphi_n(p_{k,n})(X) &= nXp_{k,n}(X) + X(1-X)p'_{k,n}(X)\\ &= nX\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)\left[\tbinom{n}{k}kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - \tbinom{n}{k}X^k(n-k)(1-X)^{n-k-1}\right]\\ &= n\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1} - (n-k)\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}\\ &= k\tbinom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k+1}\\ &= k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\left[X+1-X\right]\\ &= k\tbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\ &= kp_{k,n}(X)\end{aligned}$$

3. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_0 p_{0n} + \dots + \dots \lambda_0 p_{0n} = 0$$

En appliquant k fois φ_n pour k variant de 0 à n, on obtient un système de Vandermonde admettant uniquement la solution nulle car les coefficients de Vandermonde sont distincts. La famille est donc libre. De plus la famille $\mathscr{F}$ présente $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

4. D'après la relation de la question 2, la matrice associée à φ_n dans $\mathscr{F}$ est la matrice diagonale : $diag(0,1,2,\dots,n)$.

5. le déterminant de φ_n est égale au déterminant de $diag(0,1,2,\dots,n)$ qui est nul. L'endomorphisme φ_n n'esst donc pas bijectif.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $B_n(P) = 0$:

$$B_n(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)p_{k,n}(X) = 0 \iff \forall k \in [\![0,n]\!] P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

car $\{p_{kn} \,/\, k \in [\![0,n]\!]\}$ est une famille libre. Ainsi P possède donc $n+1$ racines distinctes. Comme $deg(P) \leq n$, P est le polynôme nul. Ainsi, $Ker(B_n) = \{0\} \iff B_n$ est injectif, comme c'est un endomorphisme en dimension finie, B_n est bijectif.

Exercice 5

1. $\mathcal{X}_n$ est en bijection avec $\{0,1\}^{(n^2)}$. C'est donc un ensemble fini et

$$\mathrm{card}(\mathcal{X}_n) = 2^{(n^2)}$$

2. On procède par récurrence pour montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n,\ |\det(M)| < n!$$

   - Initialisation : soit $M \in \mathcal{Y}_2$. On a $\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} \in [-1,1]$ (car $m_{1,1}m_{2,2}, m_{1,2}m_{2,1} \in [0,1]$). On a donc $|\det(M)| \leq 1 < 2$. Le résultat est donc vrai au rang 1.
   - Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{Y}_{n+1}$. Un développement par rapport à la dernière colonne donne

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} m_{i,n+1} \det(M_{n+1,i}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} |\det(M_{n+1,i})|$$

   où $M_{n+1,i}$ est obtenue à partir de M en supprimant ligne i et colonne $n+1$ et est donc dans $\mathcal{Y}_n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$|\det(M)| \leq n! \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} \leq (n+1)!$$

   La dernière inégalité n'est une égalité que si la dernière colonne vaut $(1,\dots,1)$ mais dans ce cas $|\det(M)| = 0 < (n+1)!$. On a donc le résultat au rang $n+1$.

   On en déduit le résultat demandé qui est moins fort que celui prouvé.

3. Soient $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre associée. On a $MX = \lambda X$. Il existe un entier i tel que $|x_i| = \max\{|x_k| / \ 0 \leq k \leq n\}$. On a

$$\lambda x_i = (MX)_i = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} x_k$$

   et donc

$$|\lambda|.|x_i| \leq \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}|x_k| \leq |x_i| \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \leq n|x_i|$$

   Comme $|x_i| > 0$ car $X \neq 0$, on en déduit que $|\lambda| \leq n$. Ainsi

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n,\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M),\ |\lambda| \leq n$$

   La matrice J_n dont tous les coefficients valent 1 est dans $\mathcal{Y}_n$ et n est valeur propre de J_n (vecteur propre associé $(1,\dots,1)$).

4. Soit $M \in \mathcal{X}_2$. Si M a 0 ou 1 coefficient non nul, elle est non inversible (de rang 0 ou 1). Si elle en a quatre, elle n'est pas inversible non plus (deux colonnes égales). Il reste à traiter le cas où il y a 2 ou 3 coefficients non nuls. On trouve que

$$\mathcal{X}_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. HP
6. On a

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Les éléments de la base canonique s'expriment donc comme combinaisons d'éléments de $\mathcal{X}_2'$ et $\mathcal{X}_2'$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. De même, on veut montrer que pour $n \geq 3$, toute matrice $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme combinaison linéaires d'éléments de $\mathcal{X}_n'$. Soient donc $i, j \in [\![1, n]\!]$.
   - Si $i \neq j$, $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n$ est une décomposition convenable.
   - Si $i \neq j$ alors la matrice M obtenue à partir de I_n en permutant les lignes i et j est dans $\mathcal{X}_n'$ et $I_n - M = E_{i,i} + E_{j,j} - E_{i,j} - E_{j,i}$. $E_{i,i} + E_{j,j} = I_n - M + E_{i,j} + E_{j,i}$ est donc combinaison d'éléments de $\mathcal{X}_n'$ avec le premier cas. On a alors

$$E_{i,i} - E_{j,j} = (E_{i,i} + E_{k,k}) - (E_{j,j} + E_{k,k})$$

     qui est aussi combinaison d'éléments de $\mathcal{X}_n'$ (on peut choisir $k \notin \{i, j\}$ puisque $n \geq 3$).
   - Ainsi, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,i} = \frac{1}{2}((E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,i} - E_{j,j}))$ est combinaison d'éléments de $\mathcal{X}_n'$ (on peut choisir $j \neq i$).