DS 8 - version normale

Séries entières - Intégrales à paramètres

Problème 1

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, \mathrm{d}t,\ G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, \mathrm{d}t \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, \mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.*
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t)\, \mathrm{d}t$.

Partie II - Autour de la formule de Viète

Q7. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

Q8. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

Q9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Q10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}\, \mathrm{d}t.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n \ : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[\ ,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}.$$

Q11. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

Problème 2

Notations et définitions

- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- **R** désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne le **R**-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le **R**-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[\![n_1, n_2]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2.

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \tag{4}$$

Q1 . Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

Q2 . Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} & = & 0 \\ c_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \end{cases}.$$

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière obtenue : $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

Q4. Soit $r > 0$ et soit f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

Q5. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} & \beta_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^* & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q6. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Q7. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q8. Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q9. Soit $r > 0$ et soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q10. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q11. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q12. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.