2021-2022 | **DS 8 - version difficile** | PSI

DS 8 - version difficile

Séries entières - Intégrales à paramètres

Problème 1

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A – Dérivées successives

Q 1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

Q 3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

Q 4. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

Q 5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B – Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

Q 6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

Q 7. En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

Q 8. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

Q 9. Montrer

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

Q 10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

Q 12. En déduire

$$\forall x \in I, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

Q 13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Q 14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

Q 15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

Problème 2

On note
- E_{cpm} le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in E_{\text{cpm}}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de f*) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t\xi} \, \mathrm{d}t$$

I.A – On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B – On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \text{et} \qquad \psi(0) = 1$$

I.B.1) Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} |\psi(x)| \, \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi^2}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C – Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D – Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \big(\mathcal{F}(f)\big)^{(n)}(\xi) = (-2\pi\mathrm{i})^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t$$

I.E – On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1) Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi\xi\, y(\xi)$$

I.E.2) Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.