2021-2022 **DS 5 - version normale** PSI

DS 5 - version normale

Séries de fonctions - Endomorphismes particuliers

Exercice 1 - Matrices définies positives

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. L'ensemble des matrices définies positives est noté $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Dans l'exercice on identifiera $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

1. Soit S dans $S_n(\mathbb{R})$. Considérons les propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) & S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ b) & \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}_+^* \\ c) & \exists T \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ S = T^2 \\ d) & \exists A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}),\ S = {}^tAA \\ e) & \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0 \end{array}$$

   où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S)$ désigne le spectre de S sur $\mathbb{C}$. Montrer $(b) \Longrightarrow (c)$, $(c) \Longrightarrow (d)$, $(d) \Longrightarrow (e)$ et enfin $(e) \Longrightarrow (b)$. En déduire que ces propositions sont équivalentes.

2. Applications.
   a) Soit S une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire classique de $\mathbb{R}^n$. De plus, posons pour tous X, Y de $\mathbb{R}^n$, $\phi(X,Y) = \langle X, SY\rangle$. Montrer que :

$$S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \phi \text{ est un produit scalaire}$$

   b) Montrer que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
   c) Montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice définie positive sont strictement positifs.

Exercice 2 - Une fonction définie par une série.

On considère la série de fonctions :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée.
4. En déduire que S est croissante sur I
5. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Problème - Séries de Fourier

Pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour réel x, on note :

$$f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t) \qquad\qquad f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$$

De plus, on rappelle qu'une subdivision d'un segment $[a,b]$ est une suite finie $(a_0, \dots, a_n)$ telle que :

$$a_0 = a, \qquad a_n = b \qquad \text{et} \qquad a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

De plus, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est C^1 par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} f \text{ est } C^1 \text{ sur }]a_i; a_{i+1}[\\ f(a_i^+),\ f(a_{i+1}^-),\ f'(a_i^+) \text{ et } f'(a_{i+1}^-) \text{ existent.} \end{cases}$$

On dit alors que la subdivision est adaptée à la fonction. En d'autres termes les points de discontinuité de f sont dans l'ensemble $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Enfin, on note D l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions de Dirichlet c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \bullet \ f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ \bullet \ f \text{ est } C^1 \text{ par morceaux sur } [0, 2\pi] \\ \bullet \ \text{En tout point } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \end{cases}$$

Partie I. Présentation de D.

1. Dessiner le graphe d'une fonction de D de votre choix non continue.
2. Soit f et g dans D, montrer qu'il existe une subdivision qui soit adaptée à f et à g.
3. Montrer que D est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
4. Montrer que D est stable par $\times$.
5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)dt$ converge pour toute application h de D.

Partie II. Le lemme de Lebesgues.

6. Soit ϕ une application C^1 sur $]a,b[$ telle que $\phi(a^+)$, $\phi(b^-)$, $\phi'(a^+)$, $\phi'(b^-)$ existent. Montrer que

$$\int_a^b \phi(t)\sin(pt)dt \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{Lemme de Lebesgues}$$

On admettra que le résultat est encore valable si ϕ est seulement continue sur $]a,b[$ avec $\phi(a^+)$ et $\phi(b^-)$ qui existent. On a également un résultat identique en remplaçant cos par sin.

Partie III. Un produit scalaire sur D. Pour tous f et g dans D. On définit :

$$(f/g) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Notons de plus h un élément de D et $(a_0,\dots,a_n)$ une subdivision de $[0,2\pi]$ adaptée à h

7. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} h^2(t)dt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{0,\dots,n-1\},\ \forall x \in]a_i;a_{i+1}[,\ h(x)=0$$

8. En déduire que $(\_/\_)$ est un produit scalaire sur D.

Partie IV. Les coefficients de Fourier d'une application de D.

9. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons

$$\mathcal{F}_n \;=\; \Big(1,\ \cos(x),\ \cos(2x)\dots,\ \cos(nx),\ \sin(x),\ \sin(2x),\ \dots,\ \sin(nx)\Big)$$

Montrer que $\mathcal{F}_n$ est une famille orthogonale de D.

10. Quelles sont les normes des vecteurs de $\mathcal{F}_n$? Notons $F_n = \operatorname{Vect}(\mathcal{F}_n)$.
11. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Notons S_n la projection orthogonale sur F_n. Justifier son existence.
12. Soit f dans D. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$S_n(f)(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

avec pour k dans $\mathbb{N}$:

$$a_k \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \qquad\qquad b_k \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

13. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie V. Formule de Dirichlet.

14. Montrer que pour tout u tel que $u \neq 0[\pi]$:

$$\frac{1}{2} + \cos(u) + \cos(2u) + \ldots + \cos(nu) \;=\; \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

15. En déduire la convergence et la valeur de :

$$I_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{2\sin(u)}du$$

16. En déduire que :

$$S_n(f)(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(2u+x)\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)}du$$

17. En déduire la formule de Dirichlet :

$$S_n(f)(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(f(x+2u)+f(x-2u)\Big)\,\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)}du$$

Partie VI. Théorème de Dirichlet.

18. Soit x dans $\mathbb{R}$. Posons :

$$g_x(t) \quad = \quad \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-f(x^+)-f(x^-)}{\sin(t)}$$

   Montrer que g_x est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(u)\sin((2n+1)u)du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

20. En déduire que $S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$
21. Déterminer une fonction f pour laquelle il n'y a pas convergence uniforme.

2021-2022

Correction DS 5 - version normale

PSI

Espaces vectoriels normés - Séries

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4