2021-2022 **DS 6** PSI

DS 6

Préhilbertiens réels - Probabilité

" *Si tu veux le petit déjeuner au lit,*
couche dans la cuisine."

Matthieu

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E. Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur normé de E de coordonnées (a, b, c) dans la base β.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ dans la base β.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme q défini par la matrice :

$$\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ba & -ca \\ -ba & c^2+a^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

3. En se servant de la question précédente, déterminer la matrice de la projection sur $(e_1-2e_2+e_3)^{\perp}$.

Exercice 2

Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. De plus on pose pour f et g dans E :

$$(f/g) \;=\; \int_0^1 fg + f'g'$$

1. Montrer que $(.,.)$ est un pse sur E.
2. On considère les sev de E suivants :

$$V = \Big\{ f \in E \;/\; f(0) = f(1) = 0 \Big\} \qquad\qquad W = \Big\{ f \in E \;/\; f'' = f \Big\}$$

   Déterminer l'expression générale d'un élément de W
3. Montrer que V et W sont orthogonaux.
4. Montrer que V et W sont supplémentaires.
5. Exprimer le projeté orthogonal sur W d'une application f quelconque de E.
6. On note $E_{ab} \;=\; \Big\{ f \in E \;/\; f(0) = a,\; f(1) = b \Big\}$. Montrer que E_{ab} est convexe.
7. Déterminer $\displaystyle \inf_{f\in E_{ab}} \int_0^1 f^2 + f'^2$. On pourra si nécessaire utiliser la fonction f_{ab} de E définie par :

$$f_{ab}(x) \;=\; a + (b-a)x$$

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ sa transposée.

Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions

Un *graphe orienté* G est un ensemble $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini dont les éléments s'appellent les *sommets* du graphe G et où $A \subset S^2$. Les éléments de A s'appellent les *arêtes orientées* du graphe G.

Si $a = (s, s') \in A$, a est l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s'. Si $(s, s') \in S^2$, on dit que s' est un *sommet voisin* de s s'il existe une arête orientée reliant s à s', c'est-à-dire si $(s, s') \in A$.

On note que s peut être un sommet voisin de lui-même (si $(s, s) \in A$) et que s' peut être un voisin de s alors que s n'est pas un voisin de s' (si $(s, s') \in A$ alors que $(s', s) \notin A$).

Marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n.

Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe en suivant les arêtes orientées du graphe. Le nombre d'étapes de cette marche aléatoire peut tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un de ses sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraine notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $t_{i,j}$, la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $t_{i,j} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $t_{i,j}$ est notée T. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition* du graphe.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_{n-1}^{(k)}, p_n^{(k)})$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

A – Résultats généraux

Q 1. Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \dots + p_n^{(k)} = 1$.

Q 2. Montrer que, pour tout tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$.

Q 3. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de T, k et $P^{(0)}$.

Q 4. On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $P = (p_1, ..., p_n)$. Montrer que $PT = P$, que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et que $p_1 + \dots + p_n = 1$.

B – Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette sous-partie, on considère le graphe orienté $G = (S, A)$ où

$$\begin{cases} S = \{1, 2, 3, 4\}, \\ A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)\}. \end{cases}$$

La figure 1 représente ce graphe en version complète à gauche et en version simplifiée à droite. Les sommets sont représentés par des cercles et l'arête orientée reliant le sommet s au sommet s', par une flèche de s vers s'. Par la suite, nous utiliserons la représentation simplifiée dans laquelle si le graphe comporte les deux arêtes orientées (s, s') et (s', s) elles sont représentées par un seul trait avec une flèche à chaque extrémité.

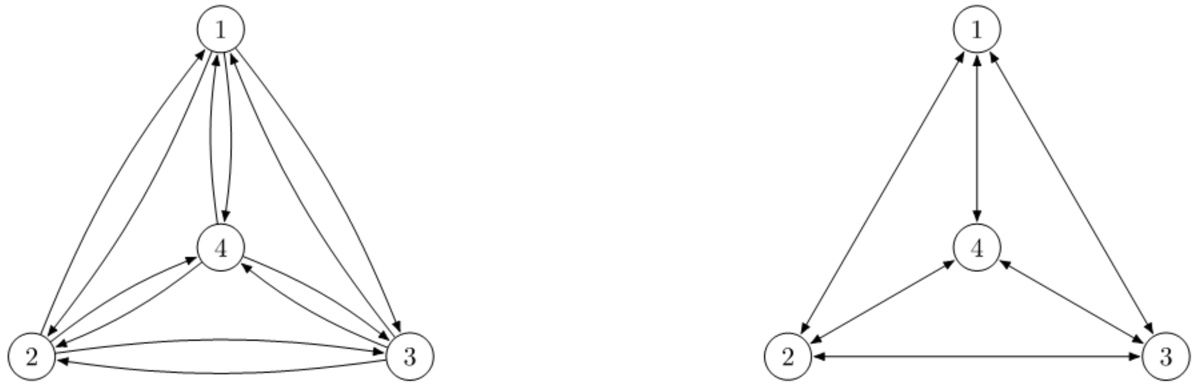

Figure 1

On suppose que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe.

On pose

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 5. Exprimer la matrice de transition T en fonction de J_4 et I_4.

Q 6. Démontrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$T = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^\top.$$

Q 7. Montrer que la suite de matrices $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et identifier géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice limite.

Q 8. Montrer que, quel que soit le vecteur ligne $P^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, p_4^{(0)})$, où pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, $p_i^{(0)}$ est la probabilité que le point soit au départ sur le sommet i, la suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

C – Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Dans cette question, on suppose que G est le graphe représenté figure 2.

On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets à qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que

$$P^{(0)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

On note $S_1 = \{1, 3, 6, 8\}$ et $S_2 = \{2, 4, 5, 7\}$.

Q 9. Donner la matrice de transition T de ce graphe et calculer

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\, T.$$

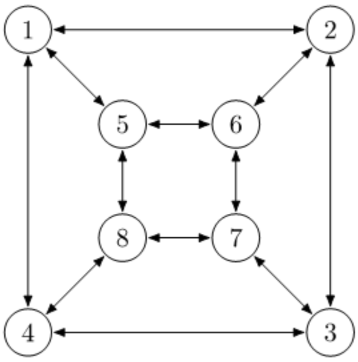

Figure 2

Q 10. Montrer que, si le point se trouve sur un sommet de la partie S_1 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de la partie S_2 à l'étape suivante et que, s'il se trouve sur un sommet de S_2 à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de S_1 à l'étape suivante.

Q 11. La suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?