DS 5 - version difficile

Espaces vectoriels normés - Séries

Exercice 1

— On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

— On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n,\, n \geq 0) \text{ tel que } \forall n \geq 0, p_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

— Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

— Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

I Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\, \frac{\lambda^n}{n!},\, n \geq 0,$$

appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0,1]$. Calculer

$$\operatorname{dist}\Big((1-p, p, 0, \cdots),\ (1-q, q, 0, \cdots) \Big).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)\, p_n,\, n \geq 0)$ est convergente.

II Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\, n \in \mathbf{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)\,p_n^{(\lambda)},\, n \geq 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda\, \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\, n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$, l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\; \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\, \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in \mathcal{S}_h$ est bornée.

IV Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\begin{aligned} \Delta f \,:\, \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ n &\longmapsto f(n+1) - f(n). \end{aligned}$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbf{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbf{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leq n \leq m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\, p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbf{N} \backslash \{0,\, m\}$.

Indication : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ *et* $n > m \geq 0$.

13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda},\ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n\geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k).$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *extrémale dans* $\mathcal{A}$ si pour tous M, N dans $\mathcal{A}$ et tout $\lambda \in]0,1[$, on a l'implication :

$$A = \lambda M + (1-\lambda)N \implies A = M = N.$$

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices *bistochastiques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{j,i} = 1$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$ est une application bijective de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{1,2,\ldots,n\}$

On note enfin $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont de la forme :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous i, j dans $\{1,2,\ldots,n\}$, où σ est une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$.

La partie A *n'est pas indispensable à la résolution des parties suivantes.*

A Un exemple

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n-1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Montrer que J est une matrice de permutation. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J, et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

Dans les trois questions suivantes n désigne un entier naturel *impair* $\geqslant 3$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1 ;

- si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k-1$ modulo n, ou bien $X_{m+1} = k+1$ modulo n, ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J.

4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.

5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \to +\infty$.

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_n$ est convexe et compact. Est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$. Tout élément de $\mathcal{P}_n$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est-il convexe ?

8. Montrer que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$.

*Dans toute la suite de cette partie, on considère une matrice **bistochastique** $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui n'est **pas** une matrice de permutation.*

9. Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ et deux familles $i_1, i_2, \ldots, i_r$ et $j_1, j_2, \ldots, j_r$

d'indices distincts dans $\{1,2,\dots,n\}$ tels que pour tous $k\in\{1,2,\dots,r\}$, $A_{i_k,j_k}\in]0,1[$ et $A_{i_k,j_{k+1}}\in]0,1[$ avec $j_{r+1}=j_1$.

10. En considérant la matrice $B=(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} B_{i_k,j_k}=1 & k\in\{1,2,\dots,r\} \\ B_{i_k,j_{k+1}}=-1 & k\in\{1,2,\dots,r\} \\ B_{i,j}=0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$. En déduire l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

On dit qu'une matrice $M=(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$, à coefficients positifs ou nuls, admet *un chemin strictement positif* s'il existe une permutation σ de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que $M_{\sigma(1),1}M_{\sigma(2),2}\cdots M_{\sigma(n),n}>0$.

On démontre par récurrence sur n, et on *admet* le résultat suivant : si M est à coefficients positifs ou nuls et si toute matrice extraite de M ayant p lignes et q colonnes avec $p+q=n+1$ n'est pas la matrice nulle, alors M admet un chemin strictement positif.

11. Montrer que A admet un chemin strictement positif.

On note σ une permutation de $\{1,2,\dots,n\}$ telle que $A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}\cdots A_{\sigma(n),n}>0$ et on pose $\lambda_0=\min\limits_j(A_{\sigma(j),j})$ et $A_0=\dfrac{1}{1-\lambda_0}(A-\lambda_0 M_\sigma)$ où M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

12. Montrer que A_0 est bien définie, et que c'est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A.

13. En raisonnant par récurrence, démontrer que A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0,M_1,\dots,M_s$:

$$A=\lambda_0M_0+\lambda_1M_1+\cdots+\lambda_sM_s$$

où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^s\lambda_i=1$.

14. Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{M\in\mathcal{P}_n}\varphi(M)$ existe. En déduire que $\inf\limits_{M\in\mathcal{B}_n}\varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation.