2021-2022 PSI

Devoir surveillé 2 - version normale

Algèbre linéaire

Exercice 1

Considérons l'ensemble :

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a+b+c+d=1 \right\}$$

Notons B le complémentaire de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est convexe. Est que A est un espace vectoriel ?
2. Montrer que A est fermé dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit M dans A. Montrer que la suite $\left(M + \frac{1}{n} I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de B qui converge vers M.
4. Montrer que B est dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante admet une limite en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

2. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante n'a pas de limite en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Exercice 3

Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$\|M\|_2 \quad = \quad \sqrt{tr\,({}^tMM)}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme.
2. Montrer que pour tout M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|MN\|_2 \ \leq \ \|M\|_2\|N\|_2$$

3. Montrer que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|M\|_2 < 1$ alors la suite (M^n) converge vers 0.
4. Montrer que pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si la suite (M^n) converge, c'est vers la matrice d'une projection.

Exercice 4

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(0)| \qquad\qquad N_2(P) = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
2. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{k}X^k\right)$ vers 0 pour chaque norme.
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 5

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie en fonction de diverses hypothèses l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, si elle existe :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt.$$

Dans la partie III, on revient par d'autres méthodes sur le calcul de certaines de ces intégrales.

PARTIE I : étude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

Dans toute cette partie, on suppose que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

A.Étude de* $F(x)$ *pour $x > 0$. On rappelle que, dans cette partie, la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < a < A$:

$$\int_a^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_{ax}^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_a^A \frac{f(u)}{u} du = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_a^{ax} \frac{f(u)}{u} du.$$

2) Montrer que pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon & \text{au voisinage de } 0 \\ |f(x) - L| \leq \varepsilon & \text{au voisinage de } +\infty \end{cases}$$

3) En déduire les limites :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du \qquad \text{et} \qquad \lim_{a\to 0} \int_a^{ax} \frac{f(u)}{u} du$$

4) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

B. Application aux cas où $\mathbf{f(t)} = \arctan(\mathbf{t})$ ***et*** $\mathbf{f(t)} = \mathbf{e^{-t}}$. Soient a et b des réels strictement positifs.

5) Déterminer l'existence et la valeur de l'intégrale :

$$I_1(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-t}}{t} dt$$

6) Déterminer l'existence de la valeur de l'intégrale :

$$I_2(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt$$

$\boxed{\text{PARTIE II : étude de } F(x) \text{ lorsque l'intégrale } I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \text{ converge.}}$

Dans toute cette partie, on suppose que l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

A. Étude d'un cas particulier. On suppose plus spécifiquement dans cette question que l'intégrale suivante converge :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

10) À l'aide d'un changement de variable, déterminer la nature et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t} dt$.

11) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

B. Application au cas où $f(t) = \sin(t)$***.***

8) Démontrer la relation suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt.$$

9) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$

10) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

11) Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$ Déterminer l'existence de la valeur de l'intégrale :

$$I_3(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at) - \sin(bt)}{t} dt$$

C. Étude de $F(x)$ pour $x>0$. On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge.

13) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}du$ lorsque A tend vers $+\infty$.

14) Déterminer comme à la question 6 la limite de $\displaystyle\int_a^{ax} \frac{f(t)}{t}dt$ lorsque a tend vers 0.

15) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel strictement positif x.

D. Application aux cas où $f(t)=e^{it}$ et $f(t)=\cos(t)$.

16) Démontrer la relation suivante pour $A>1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t}dt \;=\; \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_1^A - i\int_1^A \frac{e^{it}}{t^2}dt.$$

17) En déduire, en la justifiant soigneusement, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt$.

18) Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'existence et la valeur de :

$$I_4(a,b) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{e^{iat}-e^{ibt}}{t}dt \qquad\qquad I_5(a,b) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}dt$$