2021-2022 **Devoir surveillé 4 - version difficile** PSI

Devoir surveillé 4 - version difficile

Intégrales généralisées - Espaces vectoriels normés

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt$$

1. Montrer que I_n et J_n convergent ssi $n \geq 1$.
2. Déterminer une relation de récurrence sur les I_n
3. Exprimer I_n en fonction de n à l'aide de factorielles.
4. Exprimer I_n en fonction d'une intégrale de Wallis.
5. En effectuant le changement de variable $T = \frac{1}{t}$ dans J_1, montrer que :

$$2J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t + 1}dt$$

6. En mettant le dénominateur sous forme canonique, montrer que $J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.
7. Déterminer une relation de récurrence sur les J_n. En déduire la valeur de J_n en fonction de n.

Exercice 2

Soient $(E, \|\_\|_E)$ et $(F, \|\_\|_F)$ des espaces vectoriels normés et S la sphère unité de E.

Partie I. Un outil essentiel.

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie. Pour toute application linéaire u de E dans F, on pose :

$$N(u) = \underset{x \in S}{Max} \|u(x)\|_F$$

1. Justifier l'existence de $N(u)$.
2. Montrer que $N(\_)$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Montrer que pour tout x de E : $\|u(x)\|_F \leq N(u).\|x\|_E$
4. Soient u dans $\mathcal{L}(E, F)$ et v dans $\mathcal{L}(F, G)$. Montrer que : $N(v\,o\,u) \leq N(v).N(u)$.
5. Connaissez-vous le nom de la norme N ? Où intervient le fait que E soit de dimension finie ?

Partie II. Caractérisation des applications linéaires continues.

Soit u une application linéaire de E dans F. Ici E et F peuvent-être de dimension infinie.

6. Montrer que si :
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \ \|u(x)\|_F \leq C.\|x\|_E$$
alors u est lipschitzienne.
7. Supposons dans cette question que u est continue en 0.
   a) Rappeler la définition "epsilonnesque" de la continuité de u en 0. En déduire que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ \ \left\| u\left(\frac{x\eta}{2\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq \varepsilon$$
   b) En déduire que : $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \ \|u(x)\|_F \leq C.\|x\|_E$
8. Montrer que les points suivants sont équivalents :
   - u est continue sur E.
   - u est continue en 0.
   - $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \ \|u(x)\|_F \leq C.\|x\|_E$.
   - u est lipschitzienne.

Partie III. Continuité et dimension finie.

9. Montrer que les applications linéaires dont l'espace de départ est de dimension finie sont continues
10. En étudiant l'exemple suivant, montrer que si l'espace de départ n'est pas de dimension finie (même si l'espace d'arrivée l'est), une application linéaire peut ne pas être continue :
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X],\ \|\_\|) & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$
avec $\|P\| = \underset{x\in[0;\frac{1}{2}]}{Sup}\ |P(x)|$ pour tout P de $\mathbb{R}[X]$

Exercice 3

Partie I. Des inégalités de convexité.

1. Soient p dans $]1;+\infty[$. Justifier l'existence d'un réel q de $]1;+\infty[$, vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Que vaut $q(p-1)$?
2. Soient p et q dans $]1;+\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que :
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+,\quad \alpha\beta\ \leq\ \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$$
On pourra si besoin étudier la fonction $f_\beta(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}\beta^q - x\beta$,
3. En étudiant une fonction bien choisie, montrer que :
$$\forall p \in [1;+\infty[,\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ \ (a+b)^p\ \leq\ 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right)$$

Partie II. L'espace vectoriel L_c^p.

Soient a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Notons :

$$L_c^p \;=\; \left\{ f \in C^0(]a,b[,\mathbb{R}) \;/\; \int_a^b |f|^p \text{ converge} \right\} \qquad L_c^\infty \;=\; \left\{ f \in C^0(]a,b[,\mathbb{R}) \;/\; f \text{ bornée} \right\}$$

L'indice c voulant dire que l'ensemble contient des fonctions continues.

4. Montrer que L_c^p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. Montrer que pour tous r et s de $[1;\infty[$ vérifiant $r \leq s$, on a :
$$f^r \;\leq\; 1 + f^s$$
6. En déduire que si a et b sont dans $\mathbb{R}$ et si $1 \leq r \leq s$ alors
$$L_c^\infty \;\subset\; L_c^s \;\subset\; L_c^r$$
7. Donner deux contre exemples montrant que les deux inclusions de la question précédente sont fausses si a et b ne sont pas finis.

Partie III. Inégalité de Horder.

On conserve jusqu'à la fin du problème, p et q dans $[1;+\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout f de L^p et tout g de L^q, on pose :

$$(f/g) \;=\; \int_a^b f.g \qquad \|f\|_p \;=\; \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|f\|_\infty \;=\; \operatorname*{Sup}_{x \in]a,b[} |f(x)|$$

8. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f.g$ est convergente.
9. Montrer que pour tous f de L_c^p et g dans L_c^q vérifiant $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ on a : $|\,(f,g)\,| \leq 1$
10. En déduire que :
$$\forall f \in L_c^p,\; g \in L_c^q,\quad |\,(f/g)\,| \;\leq\; \|f\|_p \|g\|_q \qquad \text{(Holder)}$$
Quelle inégalité retrouve-t-on pour $p = q = 2$?

Partie IV. Inégalité de Minkovski.

11. Montrer en utilisant l'inégalité de Holder que pour tous f et g dans L_c^p, on a :
$$\int_a^b (|f| + |g|)^p \;\leq\; \Big(\|f|_p + \|g\|_p \Big) \times \left(\int_a^b (|f| + |g|)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$
12. En déduire que si $p \geq 1$ alors $\|\_\|_p$ est une norme.

Partie V. Le cas $p < 1$.

13. Montrer que la boule unité d'une norme quelconque sur un espace vectoriel E est convexe.
14. Supposons ici $p < 1$. Montrer que l'ensemble :
$$B = \left\{ f \in L_c^p \;/\; \|f\|_p \leq 1 \right\}$$
n'est pas convexe. En déduire que $\|\_\|_p$ n'est pas une norme.