PSI 2018-2019

Devoir surveillé 3

Calculatrices interdites

Réduction - Intégrales généralisées

Exercice 1

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(A^2 + A + I)(A^2 - A + I) \;=\; 0$$

Posons $P = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

1. Déterminer les racines de P, puis les exprimer en fonction de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
2. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $det(A) = 1$.
4. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{Z}$.
5. Montrer que si $n \leq 3$ alors $A^2 - A + I = 0$ ou $A^2 + A + I = 0$.
6. Montrer que n est pair.
7. Montrer que A est inversible.

Exercice 2

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la matrice M définie par blocs par :

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice unité de taille n et O_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer χ_M le polynôme caractéristique de M en fonction de χ_A le polynôme caractéristique de A. En déduire le spectre de M en fonction de celui de A.
2. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}[X]^2$ vérifiant :

$$P(X) \;=\; Q_1(X^2) \,+\, XQ_2(X^2)$$

3. Calculer $P(M)$ en fonction de Q_1 et Q_2.
4. En déduire que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice A montrant que la réciproque est fausse.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}dt \qquad\qquad I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}dt \qquad\qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$$

Exercice 4

1. Montrer que si f est une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ alors :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx \;=\; 0$$

On admet que le résultat est encore vrai si f n'est que C^0 sur $[a,b]$. Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Lebesgue.

2. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^0 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, posons :

$$J_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}dx \qquad\qquad K_n \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}dx$$

Montrer que $J_n + J_{n-1} = 2J_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de J_n.

4. Montrer que $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

5. En déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x}dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$