2021-2022 **Devoir surveillé 1** PSI

Devoir surveillé 1

Algèbre linéaire 2h

Exercice 1

Soient

$$\begin{cases} F &= \left\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x\in\mathbb{R}\right\} \\ G &= \left\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, y,z\in\mathbb{R}\right\} \\ H &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x=2y-z, t=x+y+z\right\} \end{cases}$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Préciser pour chacun de ces sous-espaces vectoriel une base et sa dimension. Sont-ils en somme directe ?
2. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension

Exercice 2

Soit $\beta=(e_1,e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 \\ f(e_2) &= -e_1+2e_2 \end{cases}$$

Notons $e_1'=e_1+e_2$, $e_2'=e_1-e_2)$ et $\beta'=(e_1',e_2')$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base β
2. Montrer que β' est une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la matrice P de changement de base de la base β vers la base β'
3. Déterminer sans la formule de changement de base la matrice B de f dans la base β'.
4. Rappeler la formule de changement de base dans le cadre général, puis la vérifier dans le cas de l'endomorphisme f.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B}=\left(1,X,\ldots,X^{n-1}\right)$ sa base canonique. Soient $a_1,\ldots,a_n$, des réels vérifiant : $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P\mapsto (P(a_1),\ldots,P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $L_i=T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathcal{B}'=(L_1,\ldots,L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base. Dans la suite de l'exercice, on note $M=(m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$
3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n=3$, $a_1=0$, $a_2=1$ et $a_3=2$.
   a) Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.

b) Déterminer les vecteurs colonnes X vérifiant $MX = X$.

c) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

4. **On revient au cas général**.

a) Montrer que M est inversible. Calculer son inverse.

b) Établir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.

c) Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

5. **Dans cette question, on reprend** $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$ Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

a) Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?